

Ludwig-Maximilians-Universität München
Mathematisches Institut

Dissertationsschrift

Begriffliches Wissen als Grundlage mathematischer
Kompetenzentwicklung –

Eine empirische Studie zu konzeptuellen und
prozeduralen Aspekten des Wissens von Schülerinnen
und Schülern zum Ableitungsbegriff

Marianne Moormann

Tag der mündlichen Prüfung: 15.10.2009

1. Gutachterin: Prof. Dr. Kristina Reiss

2. Gutachter: Prof. Dr. Aiso Heinze

Inhaltsverzeichnis

I. Theorie zur Begriffsbildung mit dem Schwerpunkt auf Begriffen der Differenzialrechnung

1	Grundlagen der Begriffsbildung	1
1.1	Terminologie	1
1.1.1	Begriffe, Inhalt und Umfang von Begriffen	1
1.1.2	Begriffsbildung	3
1.1.3	Begriffsverständnis	4
1.2	Theoretische Ansätze	5
1.2.1	Beweggründe für das Bilden von Begriffen	5
1.2.2	Theorien der Speicherung des Begriffsinhalts	6
1.3	Kognitionspsychologische Grundlagen der Begriffsbildung	7
1.3.1	Wahrnehmung und Erkennung von Objekten	7
1.3.2	Repräsentation und Speicherung von Wissensseinheiten	8
1.3.3	Die hierarchische Struktur des Gedächtnisses	10
1.4	Rück- und Ausblick	12
2	Ausbau begrifflichen Wissens - Schemata, Kategorien und Conceptual Change	15
2.1	Wissenserwerb in schematheoretischen Ansätzen	16
2.1.1	Merkmale von Schemata	17
2.1.2	Modifikation von Schemata	18
2.2	Conceptual Change	19
2.2.1	Grundpositionen des Conceptual Change	20
2.2.2	Konsequenzen für das Lernen und Lehren	21
2.2.3	Verschiedene Ansätze innerhalb des Conceptual Change	22
2.3	Fehler beim Erwerb von Begriffswissen	25
2.3.1	Fehlertypen	26
2.3.2	Fehlervermeidung und -korrektur	28
2.4	Zusammenfassung	29

3	Typen und Qualitäten begrifflichen Wissens	31
3.1	Typen begrifflichen Wissens	31
3.1.1	Deklaratives, konzeptuelles und prozedurales Wissen . .	32
3.1.2	Weitere Wissensformen	34
3.1.3	Zusammenhänge zwischen den Wissensformen	36
3.2	Modelle von Wissensqualitäten	37
3.2.1	Das Modell der Wissensqualitäten nach de Jong und Ferguson-Hessler	37
3.2.2	Wissensqualitäten konzeptuellen und prozeduralen Wis- sens	38
3.2.3	Das „procept“-Konzept nach Gray und Tall	40
3.2.4	Stufenmodelle der Mathematikdidaktik zum Begriffsver- ständnis	40
3.2.5	Zusammenfassung und Bewertung	42
4	Der Begriff der Ableitung	45
4.1	Zugänge zum Ableitungsbegriff aus fachmathematischer und di- daktischer Perspektive	46
4.1.1	Das Tangentenproblem	46
4.1.2	Die Steigung des Graphen in einem Punkt	47
4.1.3	Die Änderungsrate	47
4.2	Aspekte des Ableitungsbegriffs	48
4.2.1	Facetten und Interpretationen des Ableitungsbegriffs aus mathematikdidaktischer Perspektive	48
4.2.2	Relationen des Ableitungsbegriffs zu anderen Begriffen .	51
4.2.3	Schwerpunkte in Lehrplänen und Richtlinien	51
4.3	Forschungsergebnisse der Mathematikdidaktik zum Ableitungs- begriff	53
4.3.1	Empirische Befunde zum Ableitungsbegriff	53
4.3.2	Empirische Befunde zu den Lernvoraussetzungen	55
4.4	Schlussfolgerungen und Erklärungsmodelle	57
4.4.1	Das Modell von Asiala und Kollegen	57
4.4.2	Die Grundvorstellungen nach Malle	59

II. Eigene empirische Untersuchung zur Bildung des Ableitungsbegriffs bei Lernenden **59**

5	Forschungshypothesen und Methoden	61
5.1	Fragestellungen zum Begriffsverständnis	61
5.1.1	Eingrenzung des Forschungsfeldes	62
5.1.2	Forschungshypothesen	64

5.2	Vorüberlegungen zum methodischen Vorgehen	68
5.2.1	Schriftliche Leistungstests	68
5.2.2	Interviewtechniken	69
5.2.3	Mapping-Techniken	70
5.3	Schlussfolgerung	72
6	Design und Durchführung der Studie	75
6.1	Design der Studie	75
6.1.1	Zeitliche Struktur der Studie	75
6.1.2	Quantitative Untersuchungsinstrumente	77
6.1.3	Qualitative Untersuchungsinstrumente	80
6.2	Durchführung der Untersuchung	85
6.2.1	Ablauf der Untersuchung	85
6.2.2	Teilnehmer und Untersuchungsumfeld	86
6.2.3	Material und technisches Zubehör	86
6.3	Bewertung	87
7	Ergebnisse	89
7.1	Auswertung des Leistungstests	89
7.1.1	Verteilung der Summenscores	90
7.1.2	Einordnung der Testaufgaben	91
7.1.3	Ergebnisse für einzelne Aufgaben	91
7.1.4	Konsequenzen für das Interview	96
7.2	Auswertung der Interviews	98
7.2.1	Fragen und Ergebnisse zum prozeduralen Wissen	100
7.2.2	Fragen und Beispiele zum konzeptuellen Wissen	107
7.2.3	Ergebnisse zu Formelsprache und Symbolen	111
7.2.4	Ergebnisse zu den Begriffen des Vorwissens	112
7.3	Profile der Interviewten	113
7.3.1	Feststellung von Leistungsgruppen	113
7.3.2	Leistungsgruppe 1: „Ich mach’ es erst einmal graphisch.“	114
7.3.3	Leistungsgruppe 2: „Die Ableitung ist die Steigung.“	122
7.3.4	Leistungsgruppe 3: „Ich muss es rechnen können.“	127
7.4	Weitere Ergebnisse unter Berücksichtigung der Concept Maps . .	131
7.4.1	Vorbemerkung zur Methode	131
7.4.2	Überprüfung der Leistungsprofile anhand von Concept Maps	132
7.5	Zusammenfassung der Ergebnisse	137

8 Diskussion und Ausblick	149
8.1 Diskussion der Ergebnisse	149
8.1.1 Prozedurales und konzeptuelles Wissen nach Leistungsgruppen	150
8.1.2 Befunde zur formalen Schreibweise und zu Symbolen . .	153
8.1.3 Befunde zum Vorwissen	155
8.1.4 Grenzen der Methode	156
8.2 Ausblick	156
8.2.1 Erklärungsansätze mathematischer Kompetenz	156
8.2.2 Konsequenzen für die Unterrichtspraxis	157
8.2.3 Bedeutung für die didaktische Forschung	159
Index	168
Abbildungsverzeichnis	171
Tabellenverzeichnis	172
 Anhang	 175
Leistungstest	175
Interviewfragen	183

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem begrifflichen Wissen im Bereich der Differenzialrechnung. Dabei wird das Wissen von Elftklässlern untersucht und analysiert um Bedingungen des Aufbaus mathematischer Kompetenz zu identifizieren.

Im Theorieteil wird zunächst ein Begriff als abstrakte Idee vorgestellt, unter die Objekte zusammengefasst werden, die bezüglich der jeweiligen, kritischen Attribute übereinstimmen. Die einzelnen Aspekte eines Begriffs, wie auch Prozeduren und Beziehungen zu Nachbarbegriffen fügt jedes Individuum in Schemata allgemeineren Wissens ein, so dass ganze Begriffsnetze entstehen.

Um diese Vorgänge aber genauer verstehen zu können sind Informationen und Modelle notwendig, die erklären, wie Wissen überhaupt gespeichert wird. Eine Möglichkeit ist, dass nur die logische Struktur des Begriffsinhalts gespeichert wird, eine andere, dass der Begriffsinhalt in Form eines typischen Vertreters des Begriffs abgelegt wird (Anderson, 1996). Vermutlich folgt der tatsächliche Speichervorgang aber in Abhängigkeit vom jeweiligen Begriff einmal stärker der einen und einmal stärker der anderen Theorie.

Im Anschluss an diese Ausführungen wird eine Einteilung begrifflichen Wissens in konzeptuelles und prozedurales Wissen vorgenommen. Während das konzeptuelle Wissen die Beziehungen zu anderen Begriffen, Interpretationen und Vorstellungen zu einem Begriff beinhaltet, bezieht sich das prozedurale Wissen auf relativ konkrete Tätigkeiten und damit auf Prozeduren. Diese modellhafte Unterteilung erlaubt eine separate Betrachtung dieser Wissenskomponenten und ihrer Qualitäten.

Darauf aufbauend werden im folgenden Kapitel Kriterien für Wissensqualität präsentiert. Dabei wird Wissensqualität wesentlich durch den Wissensumfang und die Vernetztheit des Wissens beschrieben (de Jong & Ferguson-Hessler, 1996). Mit Vernetzung ist dabei sowohl die Vernetzung zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen als auch innerhalb der einen oder anderen Wissensform angesprochen. Bezogen auf das Fach Mathematik wird in diesem Zusammenhang auch der Formelsprache eine besondere Rolle als Bindeglied

zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen zugesprochen (Gray & Tall, 2001).

Die vorangegangenen Überlegungen lassen sich sehr gut auf die Differenzialrechnung übertragen, da dieses mathematische Gebiet vielfältige Vorstellungen, etwa zur Ableitung als Steigung oder als Grenzwert umfasst und Symbole beispielsweise sowohl für einen Grenzwert als auch für einen unendlichen Prozess stehen. Vermutlich aufgrund seines Aspektenreichtums ist der Ableitungsbegriff daher bereits in der Vergangenheit oft Gegenstand empirischer Studien gewesen. Einige dieser Studien haben Defizite gerade für die Interpretation der Ableitung in einem Punkt eines Funktionsgraphen als Tangentensteigung oder als momentane Änderungsrate ergeben. Auch zu Begriffen des Vorwissens, wie etwa dem Begriff des Differenzenquotienten, gibt es bereits einige Untersuchungen. Die Ergebnisse lassen vermuten, dass dem Differenzenquotienten im Zusammenhang mit dem Differenzialquotienten ein zu geringer Stellenwert im Unterricht eingeräumt wird (Malle, 1999, 2003).

Auf der Basis dieser Erkenntnisse und gemäß der Einteilung des begrifflichen Wissens in konzeptuelles und prozedurales Wissen unterschiedlicher Qualitäten werden Forschungshypothesen entwickelt. Diese zielen auf das Zusammenspiel von konzeptuellem mit prozeduralem Wissen ebenso ab, wie auf die Rolle des Vorwissens sowie die Beherrschung der Formelsprache und der Symbolik für den Kompetenzerwerb.

Die sich anfügende Untersuchung umfasst als Vorstudie einen schriftlichen Leistungstest, der in einer elften Klasse am Beginn der Unterrichtssequenz zur Differenzialrechnung eingesetzt wurde. Dieser Test diente hauptsächlich der Planung der folgenden Hauptstudie. Um speziell die Vorstellungen in den Fokus zu nehmen und um Nachfragen zu ermöglichen, wurde das Interview als Methode gewählt. Die Interviews wurden am Ende des Schuljahrs in zwei unterschiedlichen Klassen mit insgesamt zwölf Schülerinnen und Schülern geführt. Das Interview bestand aus 13 Fragen bzw. Aufgaben zum Ableitungsbegriff und zwei Mapping-Aufgaben, bei denen Begriffskärtchen genutzt wurden um begriffliche Nähe auch räumlich darstellen zu können.

Zur Auswertung der Interviews wurde der Erfolg in den Antworten herangezogen um die Schülerinnen und Schüler zunächst in drei Leistungsgruppen einzuteilen. Die nähere Betrachtung dieser Gruppen ergab gruppenspezifische Charakteristika. Dabei zeigte die leistungsstärkste Gruppe die weitaus umfangreichsten Vorstellungen zum Ableitungsbegriff und wählte auffallend häufig einen graphischen Zugang. Demgegenüber hielt die letzte, sehr schwache Gruppe, selbst wenn andere Zugänge deutlich näher lagen, überaus stark an Prozeduren wie den Regeln des symbolischen Differenzierens fest. In der zweiten Gruppe zeigte sich überdies ein besonders interessantes Ergebnis. Es konnte

im Fall einer Person trotz defizitärer Vorstellungen ein gutes Ergebnis erreicht werden. Da die betreffende Person besondere Stärken im Umgang mit Formelsprache und Symbolen zeigte, liegt die Vermutung nahe, dass diese Stärke zur Kompensation von Defiziten eingesetzt werden konnte.

Diese Ergebnisse haben Konsequenzen für die Unterrichtspraxis. Sie werden wie auch die Bedeutung für die Forschung am Ende der Arbeit diskutiert.

Summary

The work in hand is concerned with the concept knowledge in differential calculus. Here the concept knowledge of grade 11 students is studied and analyzed to identify the conditions for the development of mathematical competence.

Therefore, in the theoretical background a concept is introduced as an abstract idea, and concrete objects are subsumed under the concepts, if they are in accordance with certain critical attributes. The different aspects of a concept, as well as procedures and relations to superordinated concepts and other related concepts, are embedded into schemes of more general knowledge and thereby form whole concept networks.

In order to understand these processes better information and models are necessary to explain how knowledge is stored in memory. It is possible that the logical structure of a concept is stored, but it is on the other hand also possible that this structure is connected to a typical representative of the concept, that is memorized (Anderson, 1996). It is likely that the actual storage process is dependant on the certain concept as to which theory is followed.

Afterwards the concept knowledge is divided in conceptual and procedural knowledge. While conceptual knowledge mainly contains the relations to other concepts, interpretations and perceptions, procedural knowledge refers to concrete actions and thus to procedures. This theoretical model allows a consideration of each knowledge component together with its quality separately.

Then, criterions of knowledge qualities are presented in the next chapter. There, quality of knowledge is mainly explained as the amount of knowledge and the interconnectedness (de Jong & Ferguson-Hessler, 1996).

Here, interconnectedness means both, the networking between conceptual and procedural knowledge and within one of these two forms of knowledge. In this mathematical context the symbolic language plays a special role as a link between conceptual and procedural knowledge (Gray & Tall, 2001).

The preceding considerations can easily be transferred to the area of differential calculus, as it holds various perceptions, e.g. the derivative as slope or as instantaneous rate of change or as limit. And symbols represent both the limit and the infinite process. Probably due to this diversity of aspects the derivative

concept has been the subject of empirical studies quite often. Some of these studies detected deficits in the interpretation of the derivative at one point. Other studies addressed issues of the previous knowledge as well, as e.g. the notion of the difference quotient. The results suggest that in instruction too little emphasis is placed on the difference quotient (Malle, 1999, 2003). On the basis of these results and the division of concept knowledge into conceptual and procedural knowledge as well as on the basis of the quality criteria for knowledge mentioned before, research hypotheses are set up. They have in view the interaction of conceptual and procedural knowledge and as well the role of the previous knowledge and the symbolic language. The following empirical study consists of an achievement test, which was set as a preliminary study and filled in by one class of grade 11 at the beginning of a course on differential calculus. This test mainly served as a basis for planning and designing the main study. As particularly the perceptions were meant to be in the focus of the study and also to allow further queries, the interview was selected as the most appropriate method. The interviews took place a short time before the summer holidays in two different classes with altogether twelve students. The interview itself consisted of 13 questions or tasks on the derivative concept, as well as two additional mapping tasks. The students were expected to arrange cards with concept names closer to each other whenever the according concepts have a close relation from their point of view.

To analyze the interviews the students have first been grouped into three achievement groups according to their success rates in the interview tasks. Closer investigation of these groups disclosed group-specific characteristics. The high performers revealed the most extensive perceptions for the derivative concept by far. Remarkably often they selected a graphical approach. Contrary to these students the low achieving group adhered strictly to procedures, like e.g. the rules for symbolic differentiation, even if the formulation of task clearly was in favor of another approach. In the second group a result showed up that is particularly interesting. In one case a relatively high score was received despite substantial deficits concerning the perceptions. Since that single person appeared competent in handling symbolic language – above the average for this group, the assumption is that this strength can be used to compensate other deficits. These results have consequences for instruction practice. They as well as the consequences for the research are discussed at the end of this thesis.

Einleitung

Die Mathematik ist eine vergleichsweise hierarchisch aufgebaute Wissenschaft. Neue Gebiete oder Probleme erschließen sich dabei durch Modellbildung und Abstraktion und basieren damit letztlich auf grundlegenden Begriffen (vgl. Volk, 1995). In der Mathematik haben Begriffsbildungsprozesse somit eine zentrale Bedeutung und ergo auch im Mathematikunterricht.

Herrscht bis hierher noch weitgehende Einigkeit unter Bildungsforschern, Lehrern und Dozenten, finden sich zur Frage, welche Aspekte besonders zu betonen seien, um einen kompetenten Umgang mit Begriffen zu fördern, vielfach konträre Meinungen. Welchen Stellenwert hat etwa die exakte Definition, welchen haben Vorstellungen und Ideen im Vergleich zu Prozeduren? Noch besser; welchen Stellenwert sollten die genannten Aspekte haben, gemessen an den erzielten Ergebnissen von Lernenden?

Im Rahmen dieser Arbeit sollen eben solche Ziele der Begriffsbildung beleuchtet werden, die zum Zweck der Kompetenzentwicklung sinnvoll zu verfolgen sind. Thematisch erweisen sich das Gebiet der Differenzialrechnung und speziell der Ableitungsbegriff als geeignet (siehe Kapitel 4), so dass dieser Begriff den Rahmen dieser Arbeit vorzeichnet.

Zum Zweck der besseren Nachvollziehbarkeit werden die einzelnen Kapitel dieser Arbeit über die Angaben im Inhaltsverzeichnis hinaus kurz ihrer Absicht nach vorgestellt: Die Betrachtungen zur Begriffsbildung beginnen dabei mit einem Kapitel zu den allgemein kognitionspsychologischen Erkenntnissen. Neben der Definition des Begriffs und des Begriffsverständnisses etwa, werden vor allem die Beweggründe für das Bilden von Begriffen, elementare Abläufe zur Begriffsbildung und Theorien der Speicherung dieser Begriffe behandelt.

Ab dem zweiten Kapitel wird stärker auf die Untersuchung von Begriffsbildungsprozessen bei Jugendlichen und Erwachsenen und auf den naturwissenschaftlich-mathematischen Inhaltsbereich Bezug genommen. So laufen beim Menschen mit zunehmendem Wissen bei der Begriffsbildung vermehrt Prozesse ab, die mit der Einbindung neuer Informationen in bereits vorhandene Strukturen zu tun haben. Diesen Gedanken greift insbesondere der Conceptual Change Ansatz auf, der sich in den Naturwissenschaften entwickelt hat und der

hier ausführlich dargestellt wird. Auch die Thematik der Fehler beim Begriffswissen behandelt der Conceptual Change, aber eben nicht nur dieser, so dass eine Typisierung von Fehlern in einem allgemeineren Rahmen vorgenommen wird.

Mit Kapitel 3 wird der Blick schließlich auf die Anwendung des Begriffswissens gelenkt. Dazu wird das zur Bearbeitung von Aufgaben notwendige Wissen in einzelne Komponenten zerlegt und deren Beziehungen und Zusammenspiel zur Lösung betrachtet. Für diese Komponenten, und speziell für das prozedurale und das konzeptuelle Wissen, werden dann Beschreibungen unterschiedlicher Wissensqualität formuliert, wobei die vorgestellten Modelle allesamt der naturwissenschaftlichen oder mathematikdidaktischen Forschung entstammen. Eine Konkretisierung der vorangegangenen Betrachtungen für den Ableitungsbegriff bietet Kapitel 4. Hier werden sowohl die inhaltliche Seite als auch die didaktische aufgezeigt. Besonders bedeutend sind dabei die bisherigen Forschungsergebnisse der Mathematikdidaktik zum Ableitungsbegriff wie zu seinen benachbarten Begriffen.

Mit Kapitel 5, der Entwicklung der Forschungshypothesen und der Beschreibung des methodischen Vorgehens, beginnt dann die Darstellung der eigenen empirischen Untersuchung. Die Untersuchung zielt dabei auf das konzeptuelle und prozedurale Wissen von Elftklässlern zum Ableitungsbegriff und wurde in ihrem Hauptteil als Interview mit einem schriftlichen Test als Vorstudie angelegt.

Kapitel 6 beschreibt dann die Planung und Durchführung der Untersuchung im Detail. Es wird auf den genauen Verlaufsplan ebenso eingegangen wie auf die einzelnen Untersuchungsinstrumente und sonstiges erforderliches Material. Eine ausführliche, deskriptive Darstellung der Ergebnisse wird im siebten Kapitel vorgenommen. Dabei werden die Untersuchungsinstrumente chronologisch abgearbeitet, beginnend mit dem Leistungstest. Im Anschluss werden die Interviewfragen und die Antworten darauf zunächst nach Anforderungen gruppiert vorgestellt. Erst dann folgen die personenbezogenen Betrachtungen mit der nach Leistungsgruppen unterteilten Darstellung der Personenprofile.

Eine Diskussion der Ergebnisse im Hinblick auf die Forschungshypothesen sowie auf die bereits vorhandenen Ergebnisse der empirischen Forschung im Bereich der Differenzialrechnung erfolgt abschließend in Kapitel 8. Ebenso wird ein Ausblick auf die Bedeutung der Ergebnisse für die konkrete Unterrichtspraxis wie auch die didaktische Forschung gegeben.

Kapitel 1

Grundlagen der Begriffsbildung

*Es muss eine ständige Bereitschaft geben,
die Begriffe und Konzeptionen umzugestalten,
sollte dies das Nachdenken empfehlen.*

John Henry McDowell:
Begriffe und Anschauungen.

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Begriffsbildung dargestellt. Dazu wird zunächst geklärt, was unter einem Begriff und was unter der Begriffsbildung zu verstehen ist. Nachfolgend werden kognitionspsychologische Aspekte der Begriffsbildung erläutert.

1.1 Terminologie

Begriffe spielen in den verschiedenen wissenschaftlichen Disziplinen und vielen Lebensbereichen eine zentrale Rolle. Die Bedeutung von Begriffen zeigt sich in der Kommunikation der Menschen untereinander, die vom Gespräch eines Kunden mit einem Experten bis zum Verstehen von Nachrichtentexten reicht. Auch in Formulierungen der deutschen Sprache, wie z.B. dem Verb „begreifen“, taucht der Begriff auf vielfältige Weise auf. Damit stellt sich zunächst die Frage, was ein **Begriff** überhaupt ist.

1.1.1 Begriffe, Inhalt und Umfang von Begriffen

Eine mögliche Definition für einen *Begriff* gibt Wiedemann (2006):

Begriffe sind eine komplexe Gesamtheit von Gedanken über Unterscheidungsmerkmale eines untersuchten Objektes, die in Urteilen

ausgesprochen werden und allgemeine und gleichzeitig möglichst wesentliche Eigenschaften des Objektes angeben sollen. Für jeden Begriff existiert ein sprachlicher Ausdruck (Wiedemann, 2006, „Begriff“).

Dieses Zitat macht deutlich, dass es sich bei einem Begriff um weit mehr handelt als schlicht um eine Bezeichnung. Andere Autoren sprechen auch vom Begriff als abstrakte Idee (Precht, 1999) oder als „mentale Repräsentation einer Kategorie“ (Oberauer, 2006). Ein Begriff ist damit in der Regel eher komplex, wobei Merkmale dieses Begriffs, die eine Abgrenzung zu anderen Begriffen erlauben, eine bedeutende Rolle spielen. Der genannte „sprachliche Ausdruck“ bzw. die Bezeichnung heißt auch der **Begriffsname**.

Die Summe aller Merkmale, die ein Objekt notwendig aufweisen muss, um unter den Begriff zu fallen, heißt **Begriffsinhalt**. Wie im folgenden Abschnitt noch deutlich werden wird, sind Merkmale dabei im Sinne von Eigenschaften und Relationen zu anderen Begriffen zu verstehen (Wiedemann, 2006, „Begriffsinhalt“). Selbstverständlich können Objekte, die zu diesem Begriff gehören, weitere Merkmale aufweisen und werden dies in vielen Fällen auch tun. Sie müssen in diesen zusätzlichen Merkmalen jedoch nicht übereinstimmen.

Der **Begriffsumfang** ist die Menge aller Objekte, die unter den Begriff fallen, d.h. aller Objekte „deren gemeinsame Merkmale dem Begriffsinhalt entsprechen“ (Krivsky, 2003, S. 75). Typischerweise verringert sich der Begriffsumfang, je mehr Attribute den Begriffsinhalt kennzeichnen. Dies wird beispielsweise anhand der Vierecks-Beziehungen deutlich (siehe das Mengendiagramm für Vierecksarten, Abbildung 1.1). So ist beispielsweise eine Raute (oder ein Rhombus) ein Viereck mit gleich langen Seiten. Das zusätzliche Attribut „vier rechte Winkel“ führt zum Begriff des Quadrats. Das Quadrat kann damit als Sonderfall der Raute angesehen werden, wobei sich der Begriffsumfang von der Raute zum Quadrat selbstverständlich verringert.

Am Beispiel des Funktionsbegriffs wird nun dargestellt, warum die Relationen eines Begriffs zu weiteren Begriffen einen wichtigen Bestandteil im Begriffsinhalt bedeuten. Um für eine Funktion zu entscheiden, ob sie zum Umfang des Begriffs der symmetrischen Funktion gehört oder nicht, ist es für viele Beispiele eine zielführende Strategie sich den Graphen der Funktion vorzustellen (bzw. ihn zu skizzieren oder ihn gegebenenfalls von einem PC-Programm darstellen zu lassen). Es wird also auf die Anschauung einer Funktion als Funktionsgraph und damit auf einen neuen, eigenständigen Begriff zurückgegriffen. Aus dem Begriffsinhalt wird damit die Relation des Begriffs der (symmetrischen) Funktion zu dem des Funktionsgraphen genutzt, um anhand des Graphen schnell zu einer Antwort zu gelangen.

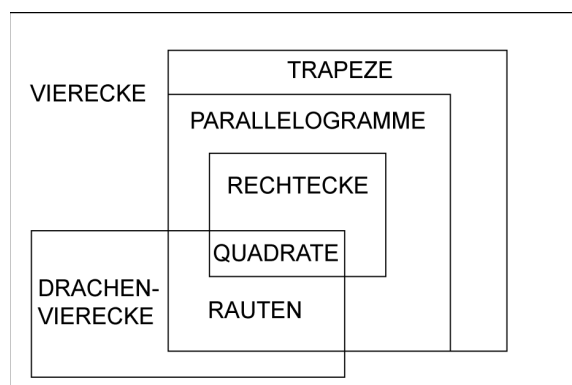


Abbildung 1.1: Mengendiagramm für Vierecksarten, angelehnt an Hilbert (1998, S. 430)

Was an den zuvor genannten Beispielen, von den Vierecksarten bis hin zur symmetrischen Funktion, bereits leicht zu erkennen ist, ist die Tatsache, dass Begriffe in den seltensten Fällen isoliert auftreten. Wie in Abbildung 1.1 (siehe Seite 3) gut zu sehen ist, gehen sie zumeist schon aus Konstellationen anderer Begriffe hervor. So entsteht ein neuer Begriff beispielsweise aus der Absicht heraus einen bereits vorhandenen Begriff, „Oberbegriff“ genannt, zu spezifizieren. Der neue Begriff wird dann als „Unterbegriff“ des ersten bezeichnet. In der Regel bestehen noch weitere Relationen dieses einen Begriffs zu anderen. So können Begriffe beispielsweise ebenso gut ein Gegensatzpaar bilden. Eine Menge von Begriffen, die aufgrund gleicher oder ähnlicher oder auch aufgrund sich konträr gegenüberstehender Eigenschaften zueinander in Beziehung stehen, wird als **Begriffsnetz** bezeichnet.

1.1.2 Begriffsbildung

Die **Begriffsbildung** stellt Edelmann (2000) als Tätigkeit des Kategorisierens und Kategoriefindens dar, die jedes Individuum für sich an konkreten Objekten, d.h. Vertretern aus dem Begriffsumfang, durchführt. „Von **Begriffsbildung** spricht man, wenn Objekte zu einer (subjektiv neuen) Kategorie zusammengefasst werden“ (Edelmann, 2000, S. 119f).

Aus dieser Definition geht hervor, dass jedes Individuum an konkreten Objekten aktiv selbst Begriffe bildet bzw. bilden muss. Einschränkend sei hier angemerkt, dass Begriffsbildungsprozesse durchaus sozial vermittelt sein können und nicht zwingend auf eigenen Erfahrungen beruhen müssen (vgl. Edelmann, 2000). Beispielsweise reichen etwa Zeichnungen, Fotos und Erzählungen zum

Erwerb des Begriffs der Raubkatze aus, so dass eine Begegnung mit einem Löwen in freier Wildbahn nicht vonnöten ist. Zumindest ein erster Begriff kann so gebildet, wenn auch nicht gänzlich erfasst werden, da beispielsweise typische Laute oder der Geruch nicht dargestellt werden können.

Jedoch bedeutet, dass ein Begriff „sozial vermittelt“ erworben wird nicht gleichzeitig, dass die Eigenaktivität für das Bilden des Begriffs keine oder auch nur eine geringere Rolle spielt, als dies für die konkreten Erfahrungen der Fall ist. Es ist unverzichtbar, dass über den Begriff nachgedacht wird, Fragen gestellt und Beispiele und Gegenbeispiele gesucht werden. Nach Krivsky (2003) hat eine Person einen Begriff dann erfolgreich ausgebildet, wenn es ihr möglich ist für Objekte zu entscheiden, ob diese zum Begriffsumfang gehören. Darüber hinaus sollte die Person Beispiele zu dem Begriff angeben können (Krivsky, 2003). Diese Definition kennzeichnet die Unterteilung der Fähigkeiten der Person in eine analytische Seite, (d.h. die Fähigkeit für Objekte zu entscheiden, „ob diese zum Begriffsumfang gehören“) und eine konstruktive Seite (d.h. in der Lage zu sein „Beispiele zu dem Begriff“ angeben zu können). Für konkrete Begriffe ist damit leicht zu überprüfen, ob diese erworben wurden. Um den Begriff zur Lösung komplexer Probleme zu verwenden, genügen die genannten Fähigkeiten jedoch nicht. Dazu ist ein (tieferes) Verständnis des Begriffs nötig.

1.1.3 Begriffsverständnis

Begriffe unterscheiden sich in der Vielfalt ihrer Beziehungen zu anderen Begriffen wie auch in der Breite ihrer Anwendungen. Demgemäß wird der kognitive Aufwand, der nötig ist um ein (tiefes) **Begriffsverständnis** zu erlangen, von einem zum anderen Begriff verschieden ausfallen. Beim Vergleich von Begriffen unterschiedlicher Fachrichtungen lassen sich vermutlich die größten Unterschiede feststellen. Dies rührt daher, dass die Begriffe sehr stark mit den Methoden und Arbeitsweisen des jeweiligen Sachgebiets verwoben sind, dem sie entstammen. Tatsächlich entspringen auch viele Modelle zum Begriffsverständnis, natürlich mit entsprechend eingeschränktem Geltungsbereich, eher den Fachwissenschaften bzw. den Fachdidaktiken als der Psychologie (vgl. etwa das Stufenmodell des Begriffsverständnisses nach Vollrath (1999), siehe Kapitel 3, Abschnitt 3.2.4). Hingegen finden sich in der Psychologie vor allem einige sehr allgemeine Modelle, die nahezu universelle Geltung besitzen und die unterschiedlichen Qualitäten des Begriffsverständnisses herausstellen. Ein solches Modell stellt der Schemaerwerb nach Abelson (1976) dar. Es besteht aus den drei Stufen

1. der episodischen,
2. der kategorischen und

3. der hypothetischen Repräsentation.

Diesem dreistufigen Modell nach wird eine einmalige Erfahrung als einzelnes Ereignis und daher episodisch abgespeichert. Werden ganz ähnliche Erfahrungen häufiger gemacht, so werden Kategorien gebildet, denen die Erfahrungen zugeordnet werden. Und schließlich bildet sich auf der Ebene der hypothetischen Repräsentation eine komplexe kausale Struktur um die ursprüngliche Erfahrung. Sie wird mit vielen hypothetischen Wenn-Dann-Beziehungen repräsentiert (vgl. Mandl et al., 1988). Ob ein Individuum eine bestimmte Stufe des Verständnisses eines Begriffs nun erreicht, hängt sicherlich von einer Reihe individueller Faktoren ab, wie etwa dem Vorwissen.

1.2 Theoretische Ansätze

1.2.1 Beweggründe für das Bilden von Begriffen

Bisher wurde die Begriffsbildung nur phänomenologisch beschrieben, ohne auf die Beweggründe einzugehen, aus denen heraus es überhaupt zur Begriffsbildung kommt. Dies wird jedoch mit diesem Abschnitt über zwei ganz unterschiedliche Ansätze nachgeholt. Der erste dieser Ansätze versteht die Begriffsbildung als eine spezielle Form der **Informationsverarbeitung**, während der zweite Ansatz auf dem **Ökologieprinzip** basiert und annimmt, dass nur aus der von der Umwelt verursachten Notwendigkeit heraus ein neuer Begriff gebildet wird.

Der Ansatz der Informationsverarbeitung geht auf Newell und Simon (1972) zurück, die den Menschen als eine Art „Informationsprozessor“ beschreiben. Den Zweck ihrer Theorie sehen Newell und Simon (1972) nicht nur darin menschliches Verhalten zu beschreiben, sondern auch zu erklären. Die Theorie der Informationsverarbeitung nimmt an, „dass sich kognitive Prozesse analysierend in eine Reihe von Einzelschritten zerlegen lassen“ (Edelmann, 2000, S. 114). Weiterhin wird von aktiven, subjektiven Strukturierungsprozessen ausgegangen, die zum Aufbau von Begriffen führen und die jedes Individuum selbst leisten muss. Die entstehenden Begriffe sind daher kein Abbild der Umwelt, sondern geistige Konstruktionen, die gewisse Ähnlichkeiten mit der Umwelt aufweisen (vgl. ebd. 2000). Die Informationsverarbeitung läuft in diesem Fall intern ab.

Der ökologische Ansatz dagegen unterstellt, dass kognitive Prozesse eine notwendige Reaktion auf Bedingungen oder Veränderungen der Umgebung sind (Bronfenbrenner, 1979). Tatsächlich wird die menschliche Entwicklung auch als „a person’s evolving conception of the ecological environment“ beschrieben (vgl. Bronfenbrenner, 1979, S. 9). Nachfolgend werden „ecological environment“ als

Ereignisse, Personen und Objekte sowie die Beziehungen dazwischen ausgeführt. Zusammenfassend lässt sich daher feststellen: „Die Analyse der Umweltstrukturen ist bedeutsamer als die Analyse der geistigen Leistung“ (vgl. Edelmann, 2000). Anderson (1996) benutzt dafür die Bezeichnung „situierter Kognition“ und gibt das Beispiel, dass „das Wissen um einen Stein, an dem wir schmerzhaft stolperten, weniger mentale Konstruktion und mehr Wahrnehmung eines Außenweltereignisses“ sei.

Wahrscheinlich ist es jedoch so, dass zur Beschreibung kognitiver Prozesse in den meisten Fällen beide Theorien wichtig sind bzw. sich ergänzen. Wissen resultiert schließlich aus der „Interaktion zwischen mentalen Strukturen und der Umwelt“ (Edelmann, 2000, S. 114).

Allerdings nehmen sicherlich auch Aspekte, wie der Verwendungszweck des Begriffs (Alltag versus Wissenschaft) oder das individuelle Vorwissen Einfluss darauf, wie ein Begriff gebildet wird. Als wesentlich bleibt festzuhalten, dass eine subjektive Komponente immer Teil der Begriffsbildung ist.

1.2.2 Theorien der Speicherung des Begriffsinhalts

Zur Speicherung von Begriffen gibt es im Wesentlichen zwei unterschiedliche Ansätze, die klassische Theorie und die Prototypentheorie. Während die **klassische Theorie** davon ausgeht, dass es der Begriffsinhalt ist, der als logische Struktur gespeichert wird, nimmt die **Prototypentheorie** an, dass die Merkmale einer Kategorie mittels eines typischen Vertreters der Kategorie und in einem gewissen Rahmen zulässiger Abweichungen abgespeichert werden (Anderson, 1996). Zu beachten ist dabei allerdings, dass nicht zwingend die notwendigen Eigenschaften, wie sie im Begriffsinhalt festgeschrieben sind, den Prototypen ausmachen, sondern die charakteristischen (Mietzel, 2007). Für den Begriff des Vogels ist die Flugfähigkeit ein solches charakteristisches jedoch nicht zwingend notwendiges Merkmal, wie das Beispiel des Straußen zeigt. Bei Sodian (2002) wird daher auch von der Prototypentheorie als einer „Theorie probabilistischer Repräsentationen“ gesprochen. Für Begriffe der Mathematik lassen sich ähnliche Merkmale ausmachen, die lediglich charakteristisch sind (zumindest für die Menge der im unterrichtlichen Kontext betrachteten Fälle) jedoch nicht zwingend notwendig. Für den Begriff der Funktion sind das etwa Eigenschaften wie „lässt sich durch eine einzige Gleichung angeben“ oder „ihr Graph lässt sich zeichnen ohne abzusetzen“.

Einige Psychologen wie Osherson und Smith (1982) vertreten eine dualistische Auffassung, in der ein Begriffskern nach der klassischen Theorie gebildet wird, jedoch für das weitere Operieren mit dem Begriff Identifikationsprozeduren entwickelt werden, die einem Abgleich mit einem Prototypen entsprechen. Während hier also beide Theorien auf ein und denselben Begriff angewendet

werden, ist es als weiterer Ansatz auch möglich, dass in Abhängigkeit vom spezifischen Begriff jeweils die eine oder andere Theorie überwiegt: „Es scheint Begriffe zu geben, bei denen eine abstrakte logische Struktur relativ leicht zu erkennen ist und andere, bei denen dies sehr viel schwieriger ist und die deshalb eher prototypisch erfasst werden“ (Edelmann, 2000, S. 121f).

1.3 Kognitionspsychologische Grundlagen der Begriffsbildung

In diesem Abschnitt werden Prozesse betrachtet, die der Begriffsbildung vorausgehen und diese gewissermaßen anbahnen. Zu Beginn wird dabei die Wahrnehmung beschrieben. Es folgen die Identifikation und die Formen, in denen (verarbeitete) Reize im Gedächtnis gespeichert werden.

1.3.1 Wahrnehmung und Erkennung von Objekten

Bevor ein Reiz¹ verarbeitet und in eine Form überführt werden kann, die sich in bestehende Wissensstrukturen einbinden lässt, muss dieser Reiz zunächst einmal wahrgenommen werden. Dies ist gar nicht so selbstverständlich, denn es wird bei weitem nicht jeder Reiz aus dem individuellen Umfeld einer Person von dieser auch wahrgenommen. Der Prozess der Wahrnehmung von Reizen ist bereits ein sehr komplexer Prozess, der überdies üblicherweise „bedürfnisgesteuert und selektiv“ abläuft (Edelmann, 2000, S. 165). Dass dies tatsächlich zutrifft, lässt sich leicht anhand eines Beispiels verdeutlichen: Beim Erkunden einer fremden Stadt wird ein Tourist vorrangig nach Sehenswürdigkeiten oder nach Info-Tafeln und Wegweisern Ausschau halten. Er wird ohne einen konkreten Bedarfsfall kaum Auskunft darüber geben können, ob ihn seine Erkundungstour beispielsweise an einem Briefkasten oder einer Apotheke vorbeigeführt hat. Seine Wahrnehmung hat hier also selektiv gearbeitet und z.B. Briefkästen von vornherein ausgeblendet. Es ist sehr gut möglich, dass derselbe Tourist an einem anderen Tag gezielt nach einem Briefkasten suchen und es eine Weile dauern wird, bis er fündig wird. Möglicherweise wird ihm, nachdem er einen Briefkasten gefunden hat, gleich noch ein zweiter auffallen. Seine Wahrnehmung ist sozusagen noch immer auf das bis eben vorrangige Interesse, nämlich einen Briefkasten zu finden, ausgerichtet. Das Beispiel zeigt, dass es - soll ein bestimmter Reiz wahrgenommen werden - wichtig ist, dass er eine (aktuelle) Bedeutung für die Person hat, die den Reiz erfährt.

¹Ein Reiz wird hier ganz allgemein aufgefasst, d.h. es werden sowohl der unmittelbar erfahrene Reiz als auch eine sozial vermittelte Form von Information darunter verstanden.

Diese Verknüpfung des Reizes mit einer eigenen Bedeutung geschieht erst im Gehirn, nachdem die Reize bereits zu neuronalen Impulsen umgewandelt wurden. Zunächst passieren die verschiedenen Reize die für sie spezifischen Sinnesorgane. Jedes der Sinnesorgane ist nun mit speziellen Zellen ausgestattet, die die physikalischen Reize in neuronale Impulse übersetzen. Diese werden dann über das Nervensystem an das Gehirn weitergegeben. Es folgen Prozesse, die dem Abbild auf dem Rezeptor, z.B. dem Bild auf der Netzhaut, eine eigene Struktur geben, es mit zusätzlichen Informationen anreichern und die somit schließlich anstelle eines exakten Abbildes eines physikalischen Gegenstandes ein „psychologisches Produkt“ daraus werden lassen (Zimbardo & Gerrig, 2003, S. 105).

Sofern ein Individuum die notwendigen Begriffe bereits erworben hat, hat es die Möglichkeit ein wahrgenommenes Objekt einer Kategorie zuzuordnen; es findet eine Identifikation des wahrgenommenen Objekts statt. Dazu, wie derartige Identifikationsprozesse tatsächlich ablaufen, gibt es verschiedene Erklärungsansätze. Im Bereich der visuellen Wahrnehmung ist der **Schablonenabgleich** eine leicht nachvollziehbare Vorstellung (Anderson, 1996). Dabei wird davon ausgegangen, dass eine Person, die ein Objekt visuell wahrnimmt, bereits über ein ganzes Archiv von Abbildungen, Mustern oder Strukturen in ihrem Kopf verfügt (für ein Beispiel siehe Anderson (1996, S. 50)). Der Schablonenabgleich erfolgt dann als direkter Vergleich des neuen Netzhautbildes des Objekts mit bereits gespeicherten Mustern. Das „neue“ Bild wird der Kategorie des übereinstimmenden Musters zugeordnet.

Eine alternative, jedoch ähnliche Theorie ist die **Merkmalsanalyse**. Ihr zufolge setzt sich jeder Reiz aus elementaren Teilen wie etwa einzelnen Strichen oder Bögen zusammen. Die Zahl 7 würde in diesem Fall in zwei Striche entsprechender Neigung zerlegt werden. Damit stellt die Merkmalsanalyse eine Mustererkennung auf einer detaillierteren Ebene dar.

1.3.2 Repräsentation und Speicherung von Wissensseinheiten

Ist der Prozess der Erkennung eines Objekts bzw. eines Musters nun erfolgreich abgeschlossen, muss zum weiteren Umgang mit diesem Objekt bzw. mit der Information aus seinem Abbild zunächst eine speicherfähige **Repräsentation** erstellt werden. Diese kann recht unterschiedlich aussehen. Als mögliche Formen der Repräsentation lassen sich „die aussagenartige, die analoge und die handlungsmäßige Repräsentation“ unterscheiden (Edelmann, 2000, S. 146). Darüber hinaus sind nicht nur disjunkte Kategorien, sondern auch Mischformen anzutreffen (vgl. Haussmann & Reiss, 1990).

Hinter der aussagenartigen Repräsentation verbirgt sich die Speicherung eher abstrakter Bedeutungen: Als Beispiel wird eine Person, nachdem sie einen Text gelesen hat, diesen in aller Regel nicht wortwörtlich wiedergeben können sondern lediglich sinngemäß. Das heißt, dass nur die Bedeutung gespeichert wurde. Dazu konnte in Experimenten an verbalem und bildlichem Material nachgewiesen werden, dass sich die Probanden leichter an bedeutungsverändernde Variationen erinnern konnten als an bedeutungslose (Anderson, 1996). Statt des Wortlautes bleibt der Sinn im Gedächtnis bzw. im Falle eines Bildes „in der Regel eine Interpretation seiner Bedeutung“ (Anderson, 1996, S. 138).

Die verbleibende, bedeutungsbezogene Struktur, die längerfristig gespeichert werden kann, ist die **propositionale Repräsentation** oder **Proposition**. Dabei ist eine Proposition „die kleinste Wissenseinheit, die eine selbständige (das heißt von anderen Wissenseinheiten unabhängige) Aussage bilden kann“ (Anderson, 1996, S. 141). Sie ist ihrer Art nach eine Aussage, die verschiedene Elemente miteinander in Beziehung setzt. „Die Darstellung erfolgt dann anhand von semantischen Netzwerken, wobei die Knotenpunkte des Netzes für Begriffe, Situationen und Ereignisse stehen, die Maschen für gerichtete und benannte Relationen dazwischen“ (Maichle, 1981, S. 35). Im einfachsten Fall werden also zwei Begriffe durch eine Kante miteinander verbunden. Die Art des Zusammenhangs wird durch die Kantenbeschriftung – üblicherweise als Prädikat – angegeben.

Bei der analogen Repräsentation wird dagegen ein eher anschauliches Bild aufgebaut. In ihrem Zusammenhang wird von **mental**en Bildern oder **mental**en Modellen als internen Repräsentationen visueller und räumlicher Sachverhalte gesprochen. **Mentale Bilder** sind also visuelle Repräsentationsformen. Allerdings bilden sie die Wirklichkeit nicht zwingend originalgetreu ab, sondern zeigen eventuell nur Ausschnitte oder bestimmte Aspekte (vgl. Anderson, 1996). Es ist jedoch bereits einiges mehr über mentale Bilder bekannt: So gibt es etwa Hinweise darauf, dass sich mentale Bilder rotieren lassen, und dass durch sie die Größe und Lage von realen Objekten zueinander bestimmt werden können. Es wird sogar vermutet, dass mentale Modelle sich ad hoc in der aktuellen Situation generieren lassen.

It is assumed that most mental models are created on the spot to deal with the demands of specific problem-solving situations. Nevertheless, it is possible that some mental models, or parts of them, which have proven useful in the past, are stored as separate structures and retrieved from long-term memory when needed. (Vosniadou, 1994, S. 48)

Die handlungsmäßige Repräsentation ist - von sehr speziellen Berufsgruppen, wie z.B. Künstlern, einmal abgesehen - hauptsächlich für Kinder bis einschließ-

lich des Grundschulalters relevant. Dabei kann es sich um zwei verschiedene Dinge handeln: Zum einen kann gemeint sein die **motorische Codierung**. Das heißt, wenn ein Individuum eine entsprechende motorische Fähigkeit aufweist, wird zurückgeschlossen, dass eine solche handlungsmäßige Repräsentation vorliegt. Weiterhin kann aber auch der „Erwerb von Sachwissen durch handelnden Umgang mit Dingen“ gemeint sein (Edelmann, 2000, S. 152). Es wird also durch eigenes Tun gelernt.

Auf die Unterschiede des frühkindlichen Begriffserwerbs im Vergleich zum Begriffslernen bei Erwachsenen weisen im Bereich der Mathematik beispielsweise auch Tietze und Kollegen (1982) hin. So erfolgt das frühkindliche Lernen so gut wie ausschließlich anhand von konkreten Beispielen und Gegenbeispielen, während sich Erwachsene eher die charakteristischen Merkmale einprägen. Hierbei kommt der Sprache eine zentrale Rolle zu.

1.3.3 Die hierarchische Struktur des Gedächtnisses

Objekte treten fast nie isoliert, sondern so gut wie immer in Kontexten auf. Dass der Kontext dem Objekt weitere Informationen hinzufügt und auf diese Weise sogar der Objekterkennung dienlich ist, zeigt sich beispielsweise im Bereich der Schriftsprache: Dort spricht man vom **Wortüberlegenheitseffekt**, der besagt, dass sich Buchstaben im Kontext ganzer Wörter leichter lesen lassen als in isolierter Form (Anderson, 1996). Ähnliche Kontexteffekte gibt es auch im Bereich der gesprochenen Sprache, z.B. den **Phonemergänzungseffekt**, der eine sinngebende Vervollständigung eines Wortes durch ein Phonem beschreibt (Anderson, 1996). Diese beiden Beispiele zeigen bereits, dass Kontexteffekte sich nicht auf eine Sinnesmodalität beschränken lassen. Genausowenig sind sie auf den sprachlichen Bereich einzugrenzen. Auch bei visuellen Szenen „kann der Kontext zur Identifikation von Objekten herangezogen werden.“ (Anderson, 1996, S. 63). Merkmalsinformationen lassen sich also durch Kontextinformationen ergänzen. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Kontext bzw. jegliche mit dem Objekt in Beziehung stehende Information größerer Allgemeinheit auf einer höheren Ebene als das spezifische, zu erkennende Objekt angeordnet ist. Die Interpretation des Objekts kann folglich als **Top-down**-Prozess bezeichnet werden (im Gegensatz zum Wahrnehmungsreiz, der **Bottom-up**-Informationen liefert). Vorstellungen oder Repräsentationen sind somit also hierarchisch strukturiert. Darüber hinaus werden Informationseinheiten in Informationspaketen, so genannten **chunks**, zusammengefasst und in einer komprimierten Form gespeichert (Steiner, 2001). Chunks können selbst wieder zusammengefasst werden und so neue chunks bilden. Diese Form der Organisation dient vor allem der Ökonomie des Arbeitsgedächtnisses, da

chunks weniger Verarbeitungskapazität benötigen als die einzelnen Informationseinheiten, die im chunk zusammengefasst sind (ebd. 2001).

Auch die mentalen Bilder können in Form von chunks gespeichert werden. Sie weisen eine Hierarchie auf und können in einzelne Komponenten zerlegt werden. Zusammengefasst zu einem chunk wird in diesem Fall eine kleine Menge primitiver(er) Repräsentationen.

Von den chunks gelangt man durch Abstraktion sukzessive zu allgemeineren Wissensniveaus. „Eine Art des Abstrahierens besteht darin, von den spezifischen Erfahrungen abzusehen und stattdessen die Merkmale und Kennzeichen der jeweiligen Erfahrungsklasse allgemein zu kategorisieren“ (Anderson, 1996, S. 147).

In diesem Zusammenhang ist folgende Hypothese aus kognitionsökonomischer Perspektive sinnvoll: „Wenn ein Merkmal nicht direkt bei einem Konzept gespeichert ist, kann man es von einem übergeordneten Konzept abrufen“ (Anderson, 1996, S. 149). Als Beispiel würde das Merkmal „hat Reißzähne“ nicht dem Begriff der Katze zugeschrieben, sondern eher der übergeordneten Kategorie der Raubtiere. Dagegen ist das Merkmal „miauen“ für Katzen spezifisch und wird direkt beim Begriff der Katze gespeichert.

Als Beispiel aus der Mathematik ist die reelle Gleichung $f(x) = 3x + 1$ zum einen die Gleichung einer Geraden, aber auch einer Funktion und einer Relation. In dieser Reihenfolge werden die Begriffe von der konkreten Gleichung bis zur Relation zunehmend abstrakter. Für viele Beispiele aus der Mathematik wirkt diese Trennung der begrifflichen Ebenen leicht etwas künstlich, da etwa beim Entwickeln von Beweisen ohnehin zunächst alle zur Verfügung stehenden Eigenschaften eines Begriffs herangezogen werden. Jedoch werden die von einem übergeordneten Begriff abgeleiteten Eigenschaften wahrscheinlich häufiger zunächst übersehen als die definierenden.

Die obige Annahme einer **hierarchischen Gedächtnisstruktur** wurde in Experimenten von Collins und Quilian (1969) überprüft. Dazu wurden die Verifizierungszeiten gemessen, die die Probanden benötigten um festzustellen, dass ein Merkmal auf einen Begriff zutrifft. Die Idee dabei ist, dass die Verifizierungszeiten im Falle von Aussagen, die einen Begriff mit einem begriffsspezifischen Merkmal verbinden, kürzer sein sollten als bei Aussagen, die einen Begriff mit einem Merkmal auf einer abstrakteren, übergeordneten Ebene verbinden. Die Hypothese lässt sich also mit dem Schlagwort „Längere Verifizierungswege gleich längere Verifizierungszeiten“ zusammenfassen.

Tatsächlich stellen Collins und Quilian (1969) in ihren Studien fest, dass die Verifizierung mit größerer Ferne des Merkmals zum Begriff zunehmend mehr Zeit in Anspruch nimmt.

Aus diesem und weiteren (insbesondere Gedächtnis- bzw. Wiederholungs-) Experimenten lassen sich folgende Schlüsse ziehen, die Anderson (1996) zusammenfassend darstellt:

1. „Wenn man einer Information über ein Konzept häufig begegnet, wird diese zusammen mit dem Konzept gespeichert, auch wenn sie aus einem übergeordneten Konzept abgeleitet werden könnte.
2. Je häufiger man einer Tatsache über ein Konzept begegnet, desto stärker wird sie mit dem Konzept assoziiert. Und je stärker Fakten mit Konzepten assoziiert sind, desto schneller werden entsprechende Aussagen verifiziert.
3. Es dauert relativ lange, Aussagen über Tatsachen zu verifizieren, die nicht direkt bei einem Konzept gespeichert sind, sondern die zuerst abgeleitet werden müssen.

Somit haben sowohl die Verbindungsstärke zwischen Tatsachen und Konzepten als auch der Abstand zwischen beiden im semantischen Netzwerk einen Einfluss auf die Abrufzeit“ (Anderson, 1996, S. 149). Die Verbindungsstärke lässt sich auf die Erfahrungshäufigkeit bzw. im schulischen Kontext insbesondere auf Übungseffekte zurückführen.

So werden schließlich größere bedeutungshaltige Netzwerke aufgebaut, sowie Ober-, Unter- und Nachbarbegriffe gebildet.

1.4 Rück- und Ausblick

Aus diesem Kapitel sind neben einführenden Begriffserläuterungen die psychologischen Theorien zur Begriffsbildung, zur Speicherung und zu den verschiedenen Repräsentationsformen für die weitere Arbeit wesentlich.

Zunächst stellt ein Begriff eine abstrakte Idee dar, der gewisse konkrete Objekte zugeordnet werden. Objekte, die zum Begriff gehören, zählen dann zum so genannten Begriffsumfang; ihre gemeinsamen Eigenschaften legen den Begriffsinhalt fest (siehe Abschnitt 1.1). Zur Speicherung von Begriffen gibt es im wesentlichen zwei Theorien, die klassische und die Prototypentheorie (siehe Abschnitt 1.2.2). Während die erste davon ausgeht, dass der Begriffsinhalt direkt gespeichert wird, nimmt die zweite an, dass nicht die wesentlichen sondern vor allem die charakteristischen Eigenschaften eines Begriffs mittels eines typischen Vertreters gespeichert werden. Besonders einleuchtend erscheint die Prototypentheorie für den Bereich der visuellen Wahrnehmung. Denn nach der Theorie des Schablonenabgleichs wird ein neu wahrgenommenes Objekt

zwecks Einordnung in ein Kategoriensystem mit den Schablonen bereits bekannter Objekte verglichen (siehe Abschnitt 1.3.1). Zusätzlich werden derartige Identifikationsprozesse noch durch Kontexteffekte unterstützt (siehe Abschnitt 1.3.3), da Begriffe im Gedächtnis nicht isoliert gespeichert, sondern in bereits vorhandene begriffliche Strukturen eingebunden werden. Dies ist kognitionsökonomisch auch durchaus sinnvoll. Ebenso gilt dies für die Annahme einer hierarchischen Gedächtnisstruktur, nach der Eigenschaften nur einmalig bei einem Oberbegriff gespeichert werden müssen um auch für verschiedene weitere Begriffe eines Begriffsnetzes zur Verfügung zu stehen.

Gleichzeitig bedeutet eine hierarchische Gedächtnisstruktur bzw. eine vernetzte Form der Begriffsspeicherung aber auch, dass sich Fehler im Begriffswissen leicht ausweiten können bzw. an anderer Stelle auftreten als sie ihrer Ursache nach zu lokalisieren sind. Dies wird neben anderen Fragen, wie etwa der nach den Bedingungen, unter denen ein Begriffsnetz produktiv genutzt werden kann, in den folgenden Kapiteln thematisiert.

Kapitel 2

Ausbau begrifflichen Wissens - Schemata, Kategorien und Conceptual Change

*Wir müssen unbedingt Raum für
Zweifel lassen, sonst gibt es
keinen Fortschritt, kein Dazulernen.
Man kann nichts Neues herausfinden,
wenn man nicht vorher eine Frage
stellt.
Und um zu fragen, bedarf es des Zweifelns.*

Richard P. Feynmann:
Die Bedeutung der Wissenschaftskultur -
Anspruch und Wirklichkeit.

Nach der Darstellung der kognitionspsychologischen Grundlagen der Begriffsbildung im vorangegangenen Kapitel werden hier nun Modelle der Wissenserweiterung vorgestellt. Allen Ansätzen ist gemeinsam, dass sie von einem Wissensaufbau in Form von Schemata ausgehen. Gegenüber frühkindlichen Formen des Begriffserwerbs treten Formen, die für das Lernen im Erwachsenenalter relevant sind, in den Vordergrund. Insbesondere wird dabei der Conceptual Change Ansatz ausführlicher dargestellt, da er sich speziell der Anbindung neuen Wissens an bereits vorhandene Wissensstrukturen widmet.

2.1 Wissenserwerb in schematheoretischen Ansätzen

Ohne auf ein spezielles Modell hinzuarbeiten, werden hier die Gemeinsamkeiten verschiedener Ansätze vorgestellt, welche von Wissensstrukturen ausgehen, die in Form von Schemata organisiert und gespeichert sind. Ein **Schema** ist eine Form „kategoriales Wissen“ zu repräsentieren (vgl. Anderson, 1996, S. 156). Damit stellen sie „Klassen von Ereignissen und Gegenständen“ dar, die „an Hand ihrer typischen Eigenschaften und Merkmale repräsentiert sind“ (Anderson, 1996, S. 139). Es handelt sich genauer um „Abstraktionen spezifischer Exemplare, die zu Schlußfolgerungen über Exemplare der in den Schemata repräsentierten Begriffe genutzt werden können“ (Anderson, 1996, S. 157). Die erwähnten Klassen werden, sofern sie sich auf Ereignisse beziehen, gelegentlich auch **Skripts** genannt (Mietzel, 2007). Beispiele wären hier Abläufe wie ein Schwimmbad besuchen, den Tisch decken oder einen Umzug durchführen. Bezogen auf den Mathematikunterricht bestehen Schemata für die Bearbeitung verschiedener Aufgabenklassen, z.B. einfache Textaufgaben² (siehe Abbildung 2.1) oder für standardisierte Kurvendiskussionen.

SKRIPT FÜR TEXTAUFGABEN

- (Lies den Text),
- Löse die Zahlen aus dem Text heraus,
- Wähle eine elementare Operation aus:
Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
- Rechne mit den Zahlen aus dem Text,
- Schreibe das Ergebnis,
- (Schreibe einen Antwortsatz).

Abbildung 2.1: Unbedachtes Schema zum Lösen von Textaufgaben

Allen Ereignissen ist gemein, dass sie verhältnismäßig stereotyp ablaufen und sich in einzelne Tätigkeiten oder Abschnitte zerlegen lassen. Demgegenüber sind Schemata, die für Gegenstände stehen wie z.B. Fahrrad oder Büro, anders strukturiert: So gibt es zunächst einen Oberbegriff, wie beispielsweise den des Fahrzeugs und eine Reihe von Attributen, wie im Fall des Fahrrads etwa Form, Farbe, Größe oder Material.

²Das in Abbildung 2.1 dargestellte Schema widerspricht den Intentionen des Mathematikunterrichts. Notwendige Schritte, die verlangen das Gelesene nachzuvollziehen oder das Ergebnis zu interpretieren, fehlen hier.

Schemata dienen dazu komplexere Wissensstrukturen darzustellen als es etwa durch Begriffe oder Begriffsnetze möglich ist. Durch spezielle, strukturelle Eigenschaften der Schemata, wie insbesondere Leerstellen (slots), die entweder offen gelassen werden oder mit überschreibbaren default-Werten gefüllt sind (siehe Kapitel 2.1.1), besteht die Möglichkeit für einzelne Exemplare bestimmter Objektklassen Merkmalsausprägungen vorherzusagen (Anderson, 1996). Dabei haben sich die in den Schemata dargestellten Zusammenhänge bzw. auch die eingefügten default-Werte dem Träger des Wissens durch seine Erfahrungen erschlossen (Mandl et al., 1988). Bezogen auf das Beispiel des Fahrrads können die Erfahrungen etwa dazuführen, dass als Felgen-Material zunächst von Aluminium ausgegangen wird. Für ein älteres Exemplar eines Fahrrads ist auch eine andere Besetzung wie etwa Stahl denkbar. In der Repräsentation des Fahrrads wird dazu lediglich der Eintrag Aluminium durch Stahl ersetzt. Möglich ist auch die Angabe eines Intervalls etwa für das Attribut der Größe oder eine nicht besetzte Stelle für die Farbe. Schemata können also mit Sonderfällen und Abweichungen umgehen.

2.1.1 Merkmale von Schemata

Als Merkmale von Schemata stellen Mandl und Kollegen (1988) sinngemäß folgende sechs Punkte heraus, die die Aspekte des voranstehenden Abschnitts teilweise wieder aufgreifen.

- „Schemata sind kognitive Strukturen, in denen allgemeines Wissen im Gedächtnis repräsentiert ist“ (a.a.O.; S. 125). Es werden vor allem **prototypische Informationen** gespeichert. Das bedeutet etwa, dass zu einem Objekt die typischen Eigenschaften abgespeichert werden oder für bestimmte Abläufe die häufig wiederkehrenden, gängigen Handlungen und Handlungsabfolgen.
- Außerdem können Schemata durchaus auch **Leerstellen** aufweisen. Diese Leerstellen nehmen entweder den Platz nicht vorhandenen Detailwissens ein oder werden in anderen Fällen auch mit variablen Werten bzw. Standardwerten gefüllt.
- Auch **Einbettungen von Schemata** unterschiedlicher Hierarchieebenen ineinander sind möglich. Denkbar ist, dass beispielsweise das Wissen um einen bestimmten Teilprozess eines technischen Ablaufs in einer Anwendungssituation benötigt wird, ein anderes Mal aber das Subschema, in dem dieses Detailwissen angeordnet ist, gar nicht aktiviert wird und nur der prinzipielle Ablauf oder die Anbindung an einen anderen Prozess (ein anderes Schema) von Bedeutung ist.

- Es wird heute angenommen, dass Schemata „sowohl generisches als auch episodisches Wissen“ enthalten (a.a.O.; S. 125). Zunächst wurde nur von generischem Wissen als in Schemata gespeichertem Wissen ausgegangen.
- Ganz ähnlich zum vorangegangenen Punkt, wird den Schemata „nicht nur eine Struktur- sondern auch eine ausgeprägte Prozesskomponente“ zugestanden (a.a.O.; S. 125f). Insbesondere sind hier Kontrollprozesse gemeint, die z.B. beim Abgleich neuer Informationen mit den vorhandenen Schemata eine Rolle spielen.
- Letztlich sind Schemata universelle Repräsentanten des menschlichen Wissens. Das bedeutet, es wird von Wortbedeutungen bis hin zu „kulturellen Wahrheiten“ alles in Form von Schemata erfasst (vgl. a.a.O.; S. 126).

2.1.2 Modifikation von Schemata

Die wenigsten Schemata sind als statische, einmal gebildete Strukturen anzusehen. Vielmehr ist davon auszugehen, dass Schemata im Zuge fortschreitenden Lernens erweitert und ausdifferenziert werden.

Rumelhart und Norman (1978) gehen davon aus, dass Modifikationen etwa durch eine Ergänzung der Schemata um neues Wissen oder durch eine Umstrukturierung der Wissensstrukturen erfolgen kann. Das heißt, im piagetschen Sinne handelt es sich um Prozesse der **Assimilation** und der **Akkomodation** (Piaget, 1968, 1983). Im ersten Fall handelt es sich damit um eine **Wissens-erweiterung**. Im zweiten Fall kommt es zur Neu-Organisation der Schemata, wobei dieser verschiedene Mechanismen zugrunde liegen können (Rumelhart & Norman, 1978; Mandl et al., 1988). Beispielsweise kann hier durch den Mustervergleich (siehe Abschnitt 1.3.1) eine **Generalisierung** oder auch eine **Differenzierung** von Wissen initiiert werden. Schemata können dabei grundlegend verändert oder sogar neu aufgebaut werden. Zu beobachten sind sowohl Generalisierungen als auch Differenzierungen beim frühkindlichen Begriffserwerb. So erarbeitet sich ein Kind etwa das Schema „Hund“ mit den wesentlichen Merkmalen „läuft auf vier Beinen“ und „hat ein Fell“. Unterwegs mit den Eltern gibt es häufiger Hunde zu sehen. Und auch wenn beispielsweise Größe und Farbe von einem zum anderen Fall variieren, wird das Schema doch immer wieder bestätigt. Änderungen des Schemas im Sinne der Generalisierung sind hier allerdings denkbar, falls das Schema zuvor fälschlich weitere Merkmale wie Größe umfasste und somit gewisse Beispiele ausnahm, z.B. alle Hunde, die deutlich größer als Dackel waren. Andersherum wird das Kind möglicherweise auch wieder eine Differenzierung seines Begriffs „Hund“ vornehmen müssen, wenn es

beispielsweise erstmals ein Pferd in natura gesehen hat, als „Hund“ betitelt hat und seitens der Eltern korrigiert wurde. Natürlich kann es auch nur zu einer kleineren Modifikation eines Schemas kommen, die etwa im Auffüllen von Leerstellen besteht. Im zuvor genannten Beispiel wäre das etwa durch Einfügen des Merkmals „kann bellen“ sinnvoll möglich. Für diesen Vorgang des Auffüllens einer Leerstelle ist die Bezeichnung **Feinabstimmung** gebräuchlich. Während jedoch die Feinabstimmung noch relativ häufig geschieht, fällt es den meisten Personen schwer, größere Teile eines Schemas zu revidieren und durch andere Wissensstrukturen zu ersetzen. Diese Beobachtung bestätigen Mandl und Kollegen (1988), die sich dabei auf eine eigene Untersuchung beziehen. Dazu ist anzumerken, dass der Wunsch möglichst lange an vorhandenen Schemata festzuhalten durchaus einem aus der Perspektive der kognitiven Ressourcen ökonomisch sinnvollen Standpunkt entspricht.

Aufgrund der Bedeutung der Umstrukturierungsprozesse im Zusammenhang mit dem Lernen im Erwachsenen- bzw. Jugendalter wird diesem Thema als nächstes ein eigener Abschnitt gewidmet.

2.2 Conceptual Change

Der Conceptual Change Ansatz hat im Grunde zwei Wurzeln, zum einen in der Pädagogik und zum anderen in der Kognitionspsychologie. In der pädagogischen Forschung hat Piaget (1968, 1983) mit seiner Theorie des Lernens, das er als zusammengesetzt aus Akkommodations- und Assimilationsprozessen ansieht, einen wesentlichen Grundstein gelegt. Auch die Kuhn'sche Theorie der historischen Entwicklung von wissenschaftlichen Begriffen geht im Kern von einem Konzeptwechsel aus. Kuhn (1962) kritisiert darin die Überzeugung, die Wissenschaft entwickle sich kontinuierlich und vertritt stattdessen die Position, dass es im Prozess der wissenschaftlichen Erkenntnisgewinnung immer wieder zu fundamentalen Brüchen („wissenschaftlichen Revolutionen“) komme. Dieser Fall trete dann auf, wenn sich Anomalien häuften, die nicht mit der aktuell akzeptierten Theorie zu erklären seien und somit einen Paradigmenwechsel erforderten, der gleichzeitig eine tiefgreifende Umstrukturierung des bis dahin gültigen Wissens bedeute (Kuhn, 1962; Delius, 2005).

Beide, Piaget (1968, 1983) und Kuhn (1962), legen damit ein Fundament für den Conceptual Change Ansatz. Vamvakoussi und Vosniadou (2004) beschreiben die kognitive Entwicklung des Menschen daher auch als Reorganisation bereits vorhandener Strukturen („reorganization of initial, domain-specific knowledge structures“). Und das ist bereits der Grundgedanke des Conceptual Change Ansatzes.

Beachtung fand der Conceptual Change Ansatz bereits in den 80er Jahren im naturwissenschaftlichen Bereich und dort speziell in der Physikdidaktik. In der Mathematikdidaktik dagegen bekam er lange Zeit kaum Aufmerksamkeit, da die vorrangige Meinung grundlegende Unterschiede zwischen den Methoden der Mathematik und dem experimentellen Vorgehen der Naturwissenschaften sah und ergo Modelle, die für das eine Gültigkeit besaßen sich keinesfalls auf das andere Gebiet anwenden ließen (zusammenfassend Vosniadou & Verschaffel (2004)).

2.2.1 Grundpositionen des Conceptual Change

Das **additive Lernen** wird oft als Gegensatz zum kumulativen Lernen verstanden und lässt sich als Lernform beschreiben, die im Ansammeln isolierter Wissenseinheiten besteht. Das additive Lernen tritt nach und nach, d.h. mit der Menge der Erfahrungen und der Breite des Vorwissens, in den Hintergrund. Der Conceptual Change Ansatz versteht sich nun als eine spezielle Beschreibung einer non-additiven Form des Wissenserwerbs (Vosniadou & Verschaffel, 2004).

Das bedeutet jedoch nicht, dass beim Conceptual Change das jeweils neuere Wissen das alte ersetzt, der Aufbau neuen Wissens also eine komplette Auslöschung des Vorwissens erfordert. Vielmehr lässt sich der Wert des Vorwissens für den weiteren Lernprozess so zusammenfassen: Vorstellungen, die nicht nur inhaltsbezogen sein müssen, sondern auch methodischer Art sein können, „organisieren die Erfahrung und bestimmen Art und Umfang des Erkenntnisfortschritts“ (Jung & Pfundt, 1981, S. 6).

Im Conceptual Change Ansatz gibt es prinzipiell zwei verschiedene Lernwege, die von den Alltagsvorstellungen zu den wissenschaftlichen Theorien führen. Für Alltagsvorstellungen, die den wissenschaftlichen nicht konträr gegenüberstehen, gibt es den **kontinuierlichen Weg**, der zum Ziel hat bestimmte Aspekte der Alltagsvorstellungen aufzugreifen und die neuen Wissensinhalte einzubinden. Dieser Weg kommt mit „Erweiterungen und kleineren Revisionen“ aus (Duit, 1996, S. 148). Der alternative, **diskontinuierliche Weg** ist dann zu wählen, wenn die vorhandenen mit den wissenschaftlichen Vorstellungen im Widerspruch stehen. In jedem Fall sind Bedingungen zu schaffen, die die Unbrauchbarkeit des bisherigen Konzepts ebenso betonen, wie die Tragfähigkeit des neuen (siehe Tabelle 2.1).

Bedingung	
Unzufriedenheit	Die empfundene Unzuverlässigkeit des alten Konzepts muss als Voraussetzung für die Bereitschaft eine neue Vorstellung anzunehmen gegeben sein.
Verständlichkeit	Die neue Vorstellung muss rational verständlich sein und dabei das Potential für zukünftige Anwendungen offenlegen.
Plausibilität	Die neue Vorstellung muss sich sinnvoll und widerspruchsfrei mit anderem Wissen in Beziehung setzen lassen.
Fruchtbarkeit	Die neue Vorstellung muss sich in der Erprobung als zielführend erweisen.

Tabelle 2.1: Bedingungen eines erfolgreichen Conceptual Change (vgl. Duit, 1996, S. 150)

Die vier wesentlichen Bedingungen, damit es überhaupt zu einem erfolgreichen Conceptual Change kommen kann, sind „Unzufriedenheit“, „Verständlichkeit“, „Plausibilität“ und „Fruchtbarkeit“. Wie in Tabelle 2.1 deutlich wird, bezieht sich dabei lediglich die „Unzufriedenheit“ auf das ursprüngliche Konzept. Denn nur durch ihre Unzufriedenheit mit der aktuellen Situation kann einer Person die Bereitschaft entwickeln eine neue Vorstellung anzunehmen. Diese neue Vorstellung sollte sich dann unbedingt als verständlich und widerspruchsfrei sowie im Zuge der Anwendung als brauchbar erweisen.

2.2.2 Konsequenzen für das Lernen und Lehren

Der Wissenserwerb durch Conceptual Change stellt eine spezielle Lernform dar und erfordert daher eigene Lehrmethoden. Eine typische Fehlerquelle ist daher das Anwenden von Methoden, die nur dem additiven Lernen gerecht werden und beispielsweise das Vorwissen unberücksichtigt lassen, in Fällen, in denen Conceptual Change anzubahnen wäre (vgl. Vosniadou & Verschaffel 2004, S. 446). Das Ergebnis sind dann synthetische Modelle, die oft fehlerbehaftet sind, da sie kombiniert aus altem und neuem Wissen entstanden sind, aber unreflektiert gebildet wurden. Die Lernenden sind darauf vorzubereiten, durch den Ausbau ihrer metakognitiven Fähigkeiten verschiedene Lernformen zu unterscheiden und die jeweils effizientesten Strategien für ein erfolgreiches Lernen anzuwenden (vgl. Vosniadou & Verschaffel, 2004, S. 446). Jedoch warnt Schnotz (1996), dass es nicht das alleinige Ziel sein kann, von den Alltagsvorstellungen weg und hin zu den wissenschaftlichen zu gelangen. In seiner Argu-

mentation weisen die in der Schule vermittelten Begriffssysteme einen Mangel an Bezug zur konkreten Erfahrungswelt auf, wohingegen die Alltagsvorstellungen an Kohärenz vermissen lassen (Schnotz, 1996). Ein Beispiel stellt der Begriff der Steigung (in Prozent angegeben) dar. Dabei sollte dem Alltagsverständnis nach eine Steigung von 100% dem maximal möglichen Wert, also der Steigung einer Senkrechten entsprechen. Unter der Annahme, dass die durchschnittliche Steigung im Alltag genauso verstanden wird wie in der Mathematik, d.h. als durchschnittliche Höhendifferenz pro Strecke in der Ebene, wird sich keine Kohärenz zwischen den Begriffen „Steigung (in Prozent angegeben)“ und „durchschnittliche Steigung“ in dem Sinne herstellen lassen, dass sich die eine Angabe aus der anderen ableiten ließe. Folglich hat die Schule die Aufgabe, „die unterschiedlichen Begriffssysteme zusammenwachsen zu lassen, indem der Lernende zum einen seine spontan gebildeten Alltagskonzepte in ein kohärentes System von Relationen einbindet und zum anderen die im Unterricht vermittelten Konzepte auf seine Alltagserfahrungen bezieht“ (Schnotz, 1996, S. 21).

2.2.3 Verschiedene Ansätze innerhalb des Conceptual Change

Insbesondere an frühen („defizit-orientierten“) Conceptual Change Ansätzen, wurde einige Kritik geübt. Sie bezog sich vielfach auf die Rolle des Vorwissens, welches per se als fehlerhaft betrachtet würde, so der hauptsächliche Vorwurf. Deshalb wäre einzig das Ziel verfolgt worden dieses Wissen zu ersetzen und zwar ohne die enthaltenen produktiven Ideen zu erkennen. In diesen und in weiteren Annahmen, wie z.B. der, dass der kognitive Konflikt, die (alleinige) Methode sei einen Conceptual Change herbeizuführen, wurden die Ansätze korrigiert und erweitert.

Der **kontextualistische Ansatz** von Halldén (1999), steht weiterer Kritik entgegen, nach der Conceptual Change Kontextvariablen, z.B. erzieherischer oder sozio-kultureller Art, außer acht lasse. So sei stets zu bedenken, dass der Conceptual change von motivationalen und affektiven Aspekten beeinflusst und begleitet werde (Caravita & Halldén, 1994; Stark, 2002; Vosniadou & Verschaffel, 2004). In seiner Theorie nun bezieht sich Halldén (1999) auf von Wrights Modell der Intention (1974). Handlungen werden mit diesem Modell erklärt und mit ihren Gründen und Ursachen betrachtet. Den pädagogisch interessanten Gehalt des Modells sieht Halldén (1999) in den darin hergestellten Zusammenhängen: „However, the model is also interesting in a pedagogical context because it relates cognitive factors to behaviour and the individual to his or her culture“ (Halldén, 1999, S. 53). In dem Modell werden die Intention-

nen durch interne Determinanten wie Wünsche, Beliefs oder Fähigkeiten und externe Determinanten wie Pflichten und Normen bestimmt.

„Using this model of action and its determinants, I propose an alternative way to conceptualize students' difficulties in acquiring new conceptions, and that is to regard the problem as one of contextualization“ (Halldén, 1999, S. 54). Als Facetten der einflussnehmenden und eventuell fehlerverursachenden Kontextualisierung können der kognitive, der kulturelle und der Situationskontext betrachtet werden. Die alltägliche Umgangssprache liefert zahlreiche Beispiele für ungenaue Begrifflichkeiten und Formulierungen. So wird Kochsalz (Natriumchlorid) oft einfach als „Salz“ bezeichnet. Da im Haushalt zumeist nur dieser Typ Salz vorkommt, ist diese Benennung hier völlig ausreichend. Im Kontext „Chemie“ würde diese Benennung zu wenig präzise sein. Genauso trifft dies auf Begriffe anderer Disziplinen zu, etwa „Vorurteil“, „Kritik“ oder „Stereotyp“. Seitens der Psychologie werden diese Begriffe in einer Form definiert, die ohne die negative Wertung auskommt, die diesen Begriffen in der Alltagssprache häufig anhängt.

In einem anderen Kontext kann die wissenschaftliche Herangehensweise an ein Problem also bedeutungslos scheinen. Konsequenterweise kann dies auch im Bereich des Lernens auftreten. Der Lernende wählt eine nicht-wissenschaftliche aber alltagstaugliche Form ein Problem zu bearbeiten. Die genauen Beweggründe und Abläufe sind jedoch von außen nicht einsehbar, so dass fälschlich der Eindruck entstehen könnte, dass der Lerner über das wissenschaftlich akzeptierte Wissen gar nicht verfügt und der Conceptual Change also nicht erfolgreich war.

Für den kognitiven Kontext stellen sich ähnliche Aufgaben der Einordnung beim Neulernen eines Begriffs. Ein Dilemma beim Lernen neuer Begriffe stellt sich wie folgt dar: „Thus, in order to understand lower order concepts it is necessary to already possess a higher order concept that forms the context for the lower order concepts and a condition for possessing that higher order concept is that the lower order concepts are already understood“ (Halldén, 1999, S. 64).

Zum kulturellen Kontext gehört das spezielle Vokabular und die eigene Sprache einer Disziplin. Auch diese kann einen Beitrag zum Verstehen eines Begriffs, vor allem zum Strukturieren, darstellen.

Ein ganz anderer – stärker kognitiv geprägter – Ansatz ist der **Rahmentheorieansatz** von Vosniadou (1994): Ausgehend von einem bereits früh entwickelten Rahmen aus ontologischen und epistemologischen Überzeugungen nimmt Vosniadou (1994) an, dass die spezifischen Theorien als Mengen von miteinander in Beziehung stehenden Propositionen innerhalb dieses Rahmens liegen und ebenfalls relativ früh gebildet werden. „[They] are meant to describe the

internal structure of the conceptual domain within which concepts are embedded“ (Vosniadou, 1994, S. 46). Entscheidend ist hier die Idee, dass nicht die Begriffe den Ausgangspunkt des Lernens darstellen, sondern dass sie erst erworben werden, wenn allgemeinere Strukturen, in die hinein sie eingebettet werden können, bereits vorhanden sind. Mit den initialen Vorstellungen über einen Begriff beginnt eine kontinuierliche Entwicklung. Dabei kann sich der Begriff entweder durch Anreicherung mit zusätzlichem Wissen oder durch eine graduelle Modifikation der schon vorhandenen mentalen Modelle vollziehen.

Zu Fehlern kommt es nach dieser Theorie besonders dann, wenn Teile der Rahmentheorie revidiert werden müssen (siehe auch Abschnitt 2.3.1).

Während Conceptual Change also in beiden zuvor dargestellten Ansätzen als graduelle Revision mentaler Modelle beschrieben wurde, stellen Chi und Kollegen (1994) Conceptual Change als Überwindung von ontologischen Kategorisierungsfehlern dar: „conceptual change occurs when a concept is reassigned from one category to another“ (Chi et al., 1994, S. 27). Solche Kategorien können beispielsweise „Dinge“ oder „Prozesse“ sein. Diese Kategorien bergen zum großen Teil umfassende Hierarchien von Subkategorien (siehe das Beispiel in Abbildung 2.2 auf Seite 24). So gelangt man abwärts zu immer feineren Ebenen.

Eine fehlerhafte Vorstellung eines Begriffs liegt dann vor, wenn sie in einer anderen Kategorie liegt als die wissenschaftliche Vorstellung dieses Begriffs; der Lerner also bildlich gesprochen vom idealen Weg abzweigt (siehe Abbildung 2.2). Dabei wird angenommen, dass der Conceptual Change schwerer zu erreichen ist, je höher die Ebene ist, auf der sich die Pfade der Kategorisierung trennen.

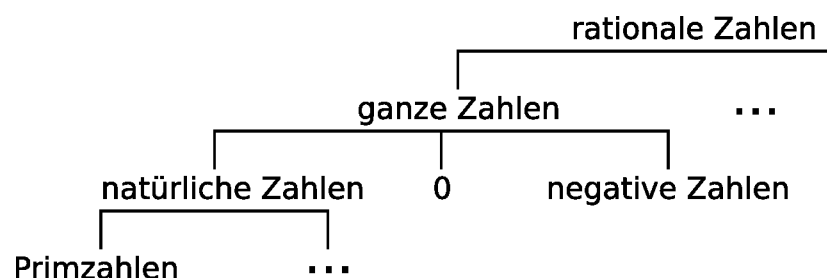


Abbildung 2.2: Beispielhafter Ausschnitt eines Kategorisierungsschemas

Zwischen den beiden zuletzt beschriebenen Ansätzen bestehen strukturelle Ähnlichkeiten, da der Fokus jeweils auf der Einordnung von Begriffen in allgemeinere Strukturen liegt. Allen Conceptual Change Ansätzen ist das Interesse gemein das Auftreten von Fehlern zu erklären. Das Bestreben reicht dabei

von einer Erklärung der Ursachen zu einer begründeten Einteilung nach dem Schweregrad des Fehlers bzw. der Schwierigkeit diesen zu korrigieren und so einen Conceptual Change zu erreichen.

2.3 Fehler beim Erwerb von Begriffswissen

Zu Fehlern im Sinne von Schülerfehlern gibt es zahlreiche Arbeiten und Analysen. Doch verlässliche Aussagen über Fehler im Begriffswissen zu gewinnen gestaltet sich nach wie vor schwierig. Ein prinzipieller Grund dafür liegt vermutlich in der Schwierigkeit, die Vorstellungen von Lernenden zu erfassen, die oft genug nicht einmal ihnen selbst bewusst sind. Was augenscheinlich wird, sind Fehler in Prozeduren, das Scheitern beim Lösen eines Problems. Dies kann jedoch vielfach nur als Auswirkung eines Fehlers betrachtet werden, der an völlig anderer Stelle seine Ursache hat. Die Frage ist also, ob der Fehler im Begriffswissen oder in der Anwendung desselben liegt („errors of comprehension and errors of application“, Halldén 1999, S. 56).

Die Art der Fehler und die unterschiedlichen Fehler-Gelegenheiten hängen stark mit den Strukturen der einzelnen Fachwissenschaften zusammen. Daher wird in diesem Abschnitt nun auf die Mathematik und die dort beobachtbaren Fehler fokussiert. Einige der folgenden Aussagen sind damit spezifisch für die Mathematik, andere lassen sich eventuell auf den Bereich der Naturwissenschaften ausdehnen. „Allgemein geht man heute davon aus, dass sie [die Fehler] überwiegend regelhaft verlaufen. Die Schüler konstruieren auf dem Hintergrund von Vorstellungen [...] ihr eigenes Regelwerk“ (Vollrath, 1999, S. 83). Dies deutet daraufhin, dass im Allgemeinen nicht die Fehldeutung eines Einzelphänomens sondern eine fehlerhafte Einbindung in einen Kontext auftritt; es sich also um eine tiefgreifende und eben tief verankerte Fehlvorstellung handelt. Solche Fehler haben weitreichende Folgen, zumal in einer Wissenschaft mit einem vergleichsweise stark hierarchischen Aufbau, wie es die Mathematik ist.

Aus der Sicht des Rahmentheorieansatzes von Vosniadou (1994) wird die Ursache vieler Fehler³ darin gesehen, dass Lernende den nicht-wissenschaftlichen Rahmen beibehalten und neue wissenschaftliche Begriffe in diesen zu integrieren versuchen, obwohl dies nicht widerspruchsfrei möglich ist (vgl. Vosniadou, 1994, S. 45). Dabei können schon geringe Abweichungen erhebliche Auswirkungen haben (siehe Abschnitt 2.3.1). „Es ist charakteristisch für semantische Netzwerke, dass geringfügige Veränderungen in ihnen zu neuen Begriffen mit markant anderen Bedeutungen führen können“ (Steiner, 2001, S. 170). Diese

³Ausgenommen sind hier Fehler, die etwa auf Unachtsamkeit oder auf Lücken im Begriffswissen zurückzuführen sind.

geringen Änderungen lassen sich zum einen didaktisch sinnvoll zum Aufbau neuer, verwandter Begriffe nutzen. Auf der anderen Seite besteht aber ein nicht zu unterschätzendes Fehlerpotenzial.

2.3.1 Fehlertypen

Wie bereits zuvor erwähnt, sind Fehler eher fachspezifisch, weshalb hier Fehlertypen betrachtet werden, die vor allem auf die Mathematik zu beziehen sind. So sind die angegebenen Beispiele auch dann der Mathematik entnommen, wenn sie Fehlertypen bzw. Theorien illustrieren, die nicht per se auf dieses Fach einzuschränken sind.

Fehler kann man nach verschiedenen Aspekten kategorisieren. Denkbar sind beispielsweise Einteilungen nach ihren Erscheinungsformen (z.B. Rechenfehler, Vorzeichenfehler) oder nach ihrer Position im Lernprozess (z.B. falscher Begriffsinhalt, Anwendungsfehler). Zur Position von Fehlern im Lernprozess lässt sich feststellen, dass sie zwar prinzipiell zu jeder Zeit vorkommen können, doch ist ihr Auftreten in bestimmten Fällen begünstigt. Wie bereits in den vorangegangenen Abschnitten zum Conceptual Change angedeutet (siehe Abschnitt 2.2), besteht diese Gefahr besonders, wenn fest verankerte Vorannahmen revidiert werden müssen um den korrekten Begriff aufzubauen (vgl. Vosniadou, 1994, S. 49). Die resultierenden Fehler werden nach dem Conceptual Change Ansatz von Vosniadou (1994) den Kategorien

- Inkonsistenz,
- träges Wissen oder
- Fehlkonzept

zugeordnet.

Inkonsistenzen resultieren dabei aus dem schlichten Addieren sich widersprechender Informationen.

Träges Wissen ist zwar theoretisch vorhanden, kann aber nicht oder nur unzureichend zur Anwendung gebracht werden. Das träge Wissen ist allerdings nur das beobachtete Phänomen. Welche Fehler ursächlich dafür verantwortlich sind, dass es zu dieser Kluft zwischen theoretischem Wissen und Handeln kommt, dazu führt Renkl (1996) drei verschiedene Erklärungsansätze an. „Strukturdefiziterklärungen“ sehen Defizite im anzuwendenden Wissen selbst, das nicht in der Form vorliegt, die die Anwendung des Wissens erlauben würde, wohingegen „Metaprozesserklärungen“ das Problem etwas weiter „außerhalb“ sehen, nämlich in den unzureichend ausgebildeten metakognitiven Prozessen

(Renkl, 1996). „Situiertheitserklärungen“ schließlich weisen generell die Möglichkeit zurück, dass Wissen transferierbar sei, und beschreiben den Wissenserwerb als grundsätzlich situativ. In der Konsequenz liegt beim trügen Wissen überhaupt kein Defizit vor, sondern es wird lediglich eine falsche Erwartung an das Wissen herangetragen (Renkl, 1996).

Fehlkonzepte treten dann auf, wenn der Lernende ein synthetisches Modell aus alter und neuer Information aufbauen will. Ein Abgleich kann aber aufgrund der Inkonsistenz der Information nicht erfolgreich sein (vgl. Vosniadou, 1994, S. 50).

Aus dem Bereich der Mathematikdidaktik gibt es einen zweiten Kategorisierungsvorschlag. Dieser erlaubt es die Fehlkonzepte genauer zu unterteilen. Dabei gibt es einige wenige Fehlerkategorien, die häufig anzutreffen sind (angelehnt an Vollrath, 1999, S. 124, eigene Beispiele).

- Ein zu **eingesengtes Begriffsverständnis** liegt z.B. vor, wenn eine Tangente an einen Graphen nicht als solche akzeptiert wird, mit dem Argument, dass sie diesen Graphen an einer weiteren Stelle nochmals berührt oder schneidet.
- Ein **zu weit gefasstes Begriffsverständnis** zeigt sich z.B., wenn die frühe Vorstellung von der Multiplikation, dass das Produkt zweier Zahlen betragsmäßig immer größer sei als jede einzelne dieser Zahlen, auf die rationalen Zahlen ausgedehnt wird und sich in der Folge Fehler in den Prozeduren einstellen.
- **Fehlende Klarheit/Abgrenzung zu anderen Begriffen** liegt beispielsweise dann vor, wenn der Unterschied zwischen Begriffen wie „Ableitung (in einem Punkt)“ und „Ableitungsfunktion“ oder „Differenzen“ und „Differenzialquotient“ nicht verstanden wird. Zudem kann der verbreitete zweideutige Sprachgebrauch des Begriffsnamens der „Ableitung“ für die „Ableitung (in einem Punkt)“ wie auch für die „Ableitungsfunktion“ das Problem verschärfen und gleichzeitig Fehlvorstellungen der Lernenden überdecken.
- Ein **abweichendes Alltagsverständnis bei Wortgleichheit** schließlich findet sich im Begriff „Wenden“ bzw. dem abgeleiteten, mathematischen Begriff „Wendepunkt“. Der Begriff „Wenden“ bezeichnet im Alltag das Umkehren. Am Ende einer Sackgasse gibt es einen „Wendehammer“, einen Platz der ausreicht um etwa eine enge Kurve mit dem Fahrrad zu fahren, bei durchwegs links eingeschlagenem Lenker. Vom Alltagsbegriff ausgehend liegt es keinesfalls nahe hinter der Bezeichnung eine Stelle zu

vermuten, an der der Graph von einer Rechts- in eine Linkskurve wechselt (oder umgekehrt). Viel eher müsste doch dem Alltagsverständnis nach der „Wendepunkt“ inhaltlich dem entsprechen, was in der Mathematik als Extrempunkt bezeichnet wird.

Es sei angemerkt, dass die meisten der hier genannten Beispiele aus dem Bereich der Analysis entnommen sind. Denkt man aber beispielsweise an das „Haus der Vierecke“ und die hiermit verbundenen Schwierigkeiten der begrifflichen Abgrenzung („Auch ein Quadrat ist ein Rechteck.“), so lässt sich begründet vermuten, dass auch andere Gebiete ähnliche Fehlergelegenheiten bieten.

2.3.2 Fehlervermeidung und -korrektur

Zur Fehlervermeidung sei betont, dass diese sich nur auf tiefe, sich über längere Zeit verfestigende Fehlvorstellungen beziehen kann. Spätestens durch die neuere Fehlerforschung und die Theorie des so genannten **negativen Wissens** (z.B. Wissen um zu unterlassende Handlungsschritte, wie das Kürzen in Summen, damit eine Prozedur erfolgreich ausgeführt werden kann) hat sich vielmehr die Meinung durchgesetzt, dass Fehlern im Lernprozess eine wichtige Rolle zukommt. Fehler verhindern zu wollen sei daher falsch: „Man würde dabei [...] die Bedeutung von Fehlern im mathematischen Erkenntnisprozess verkennen“ (Vollrath, 1999, S. 83). Der positive Aspekt ist dabei, dass Fehler „eine genauere Abgrenzung des Korrekten von dem Nichtkorrekten erlauben bzw. dies sogar überhaupt erst ermöglichen“ (Heinze, 2004, S. 223).

Ergo kann nur eine positive Fehlerkultur das erstrebenswerte Ziel für den Unterricht sein. Diese zeichnet sich zunächst dadurch aus, dass Fehler zugelassen werden und Zeit eingeräumt wird um diese beispielsweise in Diskussionen zu korrigieren. „Fehlermachen ist erlaubt, an Fehlern wird gearbeitet, das Erhellungspotenzial des Fehlers wird genutzt“ (NZZ-Bericht Meier-Rust, 2002, S. 97).

Ein vernünftiger Umgang mit Fehlern beinhaltet nach Vollrath (1999, S. 83) folgende Punkte:

- „Den Schülern wird deutlich, dass man das Auftreten von Fehlern für etwas Natürliches im Lernprozess hält.
- Die Schüler werden für kritische Situationen sensibilisiert. Sie setzen persönlich Warnzeichen bei bestimmten Aufgabentypen und achten auf sie.
- Die Fehlerhaftigkeit bestimmter Überlegungen und Verfahrensweisen wird erkannt und überwunden.

- Die Analyse eigener Fehler wird zu einer Vertiefung von Einsichten genutzt. “

Zusammenfassend zielen diese Maßnahmen also zum einen auf eine andere Wahrnehmung der (Rolle der) Fehler und zum anderen auf eine Stärkung der Methodenkompetenz der Lernenden ab (Vollrath (1999); Heinze (2004)).

2.4 Zusammenfassung

Für das Lernen im Jugend- und Erwachsenenalter gilt in der Regel, dass neues Wissen in bereits vorhandene Strukturen aufgenommen wird und dort zahlreiche Anknüpfungspunkte findet. Insofern haben die Prozesse der Umstrukturierung des Wissens, wie sie dieses Kapitel darstellt (siehe Abschnitt 2.2), Vorrang vor Prozessen des Aufbaus neuer Wissensstrukturen.

Die bereits vorhandenen, meist komplexen Wissensstrukturen werden seitens der Lernforschung in Form von Schemata beschrieben (siehe Abschnitt 2.1). Eine Besonderheit der Schemata sind die Leerstellen, die üblicherweise mit überschreibbaren default-Werten besetzt sind. Durch sie sind Schemata also grundsätzlich sehr flexibel angelegt. Des Weiteren ist bemerkenswert, dass in Schemata nicht unbedingt die definierenden sondern stattdessen die charakteristischen Eigenschaften einer Klasse von Objekten gespeichert sind.

Schemata können erweitert und modifiziert werden. Der Conceptual Change Ansatz kennt dabei den kontinuierlichen und den diskontinuierlichen Weg um neue Wissensinhalte in vorhandene Strukturen einzubinden (siehe Abschnitt 2.2.1). Neben Ausführungen dazu werden insbesondere in neueren Ansätzen des Conceptual Change die Bedeutung des Vorwissens und des situativen Kontexts für die Entwicklung wissenschaftlich akzeptierter Vorstellungen von Begriffen betont (siehe Abschnitt 2.2.3).

Der zweite Teil des Kapitels befasst sich mit Fehlern im begrifflichen Wissen und ihrer Kategorisierung, wobei auch hier der Conceptual Change Ansatz eine Rolle spielt, da er Beiträge zur Systematisierung und Erklärung von Fehlern liefert (siehe Abschnitt 2.3.1). Speziell für den Bereich der Mathematik hat Vollrath (1999) unterschiedliche Formen von Fehlkonzepten und Inkonsistenzen als Klassen von Fehlern im Begriffswissen aufgefächert (siehe Abschnitt 2.3.1). Dabei wird deutlich, dass die Grenzen eines Begriffs oft unscharf sind.

Kapitel 3

Typen und Qualitäten begrifflichen Wissens

*Menschliches Wissen und Können
(...) fallen in eins zusammen,
weil Unkunde der Ursache
uns um den Erfolg bringt.*

Francis Bacon:
Neues Organ der Wissenschaften.

Während die Prozesse des Begriffsaufbaus die ersten beiden Kapitel bestimmen, liegt der Fokus dieses Kapitels auf dem Resultat aus diesen Prozessen. Das heißt, dass es nun darum geht verschiedene Typen begrifflichen Wissens zu identifizieren und zu charakterisieren. In einem weiteren Schritt werden Ansätze für Qualitätsmaße und qualitative Abstufungen begrifflichen Wissens präsentiert, die aus der psychologischen wie der didaktischen Forschung stammen. Vielfach müssen diese Modelle jedoch auf einen Typ begrifflichen Wissens oder auch ein Fachgebiet eingegrenzt werden. Entsprechend nehmen hier mathematikdidaktische Ideen mehr Raum ein, als in den voranstehenden Kapiteln.

3.1 Typen begrifflichen Wissens

Seit langem ist das begriffliche Wissen Gegenstand der psychologischen Forschung. Dabei hat sich eine bestimmte Terminologie herausgebildet, wie etwa das „konzeptuelle“, das „deklarative“ und das „prozedurale Wissen“. Ein Problem besteht in der Abgrenzung des konzeptuellen Wissens vom deklarativen Wissen. Zunächst erstaunt, dass in der Literatur dem deklarativen wie dem konzeptuellen Wissen, das prozedurale als Gegensatz gegenübergestellt wird.

Scheinbar unabhängig vom genauen Verständnis der Begriffe „deklarativ“ und „konzeptuell“ wird damit das prozedurale Wissen als der Teil begrifflichen Wissens festgelegt, den das deklarative oder konzeptuelle Wissen gerade nicht abdeckt (Anderson, 1996). So finden in der Literatur die Bezeichnungen „deklaratives Wissen“ und „konzeptuelles Wissen“ teils synonym Verwendung (siehe z.B. Steiner (2001)). In dieser Arbeit hingegen werden die Begriffe als voneinander unterschiedlich angesehen. Beinhaltet der Ausdruck „deklarativ“ doch die Vorstellung, dass die Wissensinhalte dieses Typs vom Träger dieses Wissens expliziert werden können, was weiterhin bedeutet, dass ihm dieses Wissen bewusst (zugänglich) ist. Die Bezeichnung des Wissens als „konzeptuell“ oder möglicherweise noch mehr seine englische Entsprechung, „conceptual knowledge“, stellen dieses Wissen klar als das Wissen um einen Begriff heraus, womit ein Schwerpunkt auf die Relationen zu anderen Begriffen gelegt wird. Es kann explizit oder implizit sein (Rittle-Johnson et al., 2001).

3.1.1 Deklaratives, konzeptuelles und prozedurales Wissen

Wie bereits im obigen Abschnitt formuliert wurde, ist **deklaratives Wissen** dem Träger des Wissens bewusst zugänglich. Im Kern stellt es ein Faktenwissen dar und wird in einem Teil des Langzeitgedächtnisses in Form abstrakter Propositionen, mentaler Bilder oder zeitlicher Abfolgen gespeichert (Anderson, 1983). Es wird angenommen, dass dieser Teil des Gedächtnisses ein „aktives kognitives System“ bildet, dass sowohl zur Speicherung als auch zur Wiedergabe von Faktenwissen zur Verfügung steht (Edelmann, 2000).

Das deklarative Wissen wurde ursprünglich ausschließlich als explizit und daher abfragbar aufgefasst. Inzwischen wird aber anerkannt, dass die Abfragbarkeit nicht unmittelbar auf das Vorhandensein oder Fehlen von Wissen schließen lässt. Den sprachlichen Anforderungen – oder in diesem Zusammenhang besser sprachlichen Hindernissen – wird mittlerweile mehr Bedeutung beigemessen, so dass es zu einer begrifflichen Aufweichung und teilweisen Gleichsetzung der Begriffe des deklarativen und des konzeptuellen Wissens kommt.

Als **konzeptuelles Wissen** wird ein solches Begriffswissen bezeichnet, das sich durch seine Beziehungshaltigkeit auszeichnet. Es wird durch Abstraktion von der ursprünglichen Form, in der Wissen erworben wurde, erzielt oder durch Bildung von Kategorien. Die Kategorien stellen, wie zuvor schon in der Repräsentationsform als Schemata beschrieben, Klassen von Erfahrungen dar, die jeweils in den allgemeinen Merkmalen, die eine Kategorie festlegen, übereinstimmen (Anderson, 1996). Beim Aufbau konzeptuellen Wissens bleiben die bedeutungshaltigen Informationen bestehen, Details spezifischer Erfahrungen

werden jedoch gelöscht. Konzeptuelles Wissen kann als ein Netzwerk angesehen werden, in dem die Relationen eine ähnliche Rolle spielen wie die über diese Relationen miteinander verbundenen Informationseinheiten (Hiebert & Lefevre, 1986). Das konzeptuelle Wissen wird als Basis für ein inhaltliches Verständnis angesehen (Schneider, 2006). Es kann explizit oder implizit vorliegen und wird auch mit „knowing, why“ bezeichnet und von Schneider (2006, S. 22) als „abstraktes Tiefenverständnis“ betitelt. Aufgrund dieser Abstraktheit (zumindest relativ zum prozeduralen Wissen, wie sich noch zeigen wird) wird dem konzeptuellen Wissen eine hohe Generalisierbarkeit und Transferierbarkeit zugestanden (Rittle-Johnson et al., 2001).

Im Gegensatz zum deklarativen Wissen⁴ steht das **prozedurale Wissen**, welches als eine Art „Handlungswissen“ verstanden wird. Es wird gern mit dem Schlagwort „knowing, how“ versehen und ermöglicht das Anwenden (einfacher) Prozeduren und Schemata. Das prozedurale Wissen ist ein stärker implizites Wissen, das sich weitgehend der Beschreibung entzieht und das im Langzeitgedächtnis gespeichert wird. „Prozedurales Wissen wird vor allem als Menge von Regeln beschrieben, deren sequentielle Anwendung die zielgerichtete Lösung von Problemen ermöglicht“ (Schneider, 2006, S. 53). Weiter gilt es als ein Wissen, das stark an einen festen Kontext oder sogar nur an Oberflächenmerkmale gebunden und daher nicht generalisierbar ist (Hiebert & Lefevre, 1986; Rittle-Johnson et al., 2001).

Es wird angenommen, dass das prozedurale Wissen separat vom deklarativen gespeichert wird. Als Bezeichnungen sind daher auch das „deklarative“ und das „prozedurale Gedächtnis“ gebräuchlich. Das deklarative Gedächtnis ist der Teil des Gedächtnisses, der allgemeine Wissens Elemente enthält, während das prozedurale Gedächtnis die sogenannten Produktionen beinhaltet. Beide Gedächtnisse bilden zusammen das Langzeitgedächtnis (siehe Abbildung 3.1). Neben dem Langzeitgedächtnis gibt es das Arbeitsgedächtnis, in welches zunächst einmal alle neuen Informationen eingehen, wie z.B. Sinneseindrücke, bevor sie entweder im deklarativen oder aber im prozeduralen Gedächtnis längerfristig abgespeichert werden. Darüber hinaus kann das Arbeitsgedächtnis aber auch Wissen aus dem deklarativen und dem prozeduralen Gedächtnis abrufen. Dieses Wissen wird dann miteinander in Beziehung gesetzt und zur Lösung eines aktuellen Problems genutzt.

Das Arbeitsgedächtnis enthält außer reiner Information auch Strategien, sowie Kontroll- und Steuerungswissen, das es auf die Inhalte des Langzeitgedächtnisses anwendet (siehe Abbildung 3.1).

⁴Es wird hier zunächst weiter der Ausdruck deklaratives Wissen verwendet, da dies der Terminologie von Anderson entspricht und seine Gedächtnistheorie den nächsten Abschnitt bestimmt.

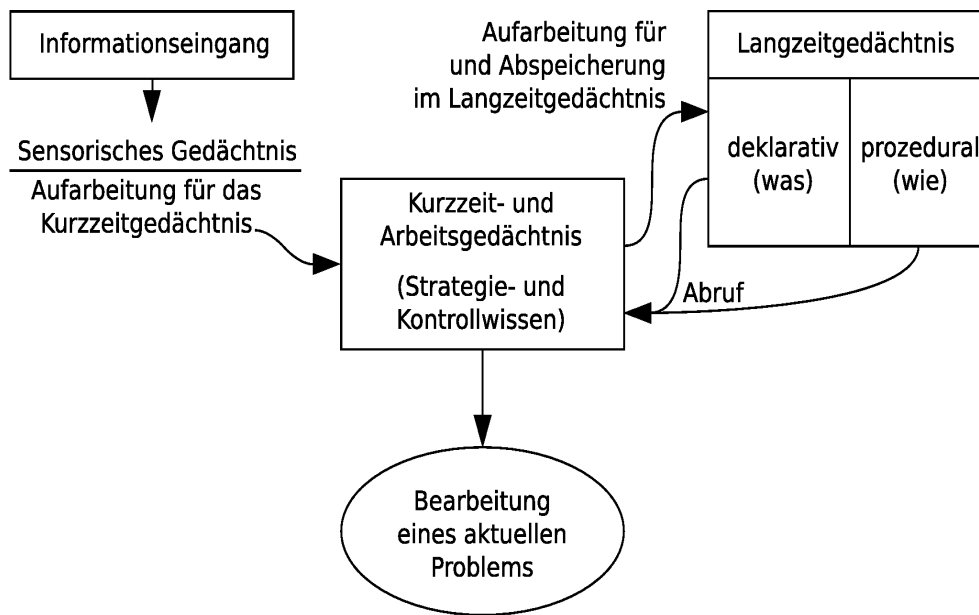


Abbildung 3.1: Modell der Interaktion von Sensorischem, Arbeits- und Langzeitgedächtnis

3.1.2 Weitere Wissensformen

Eine ganze Reihe verschiedener Wissensformen listen de Jong und Ferguson-Hessler (1996) aus der Literatur auf und unternehmen den Versuch sie zu ordnen. Sie beschränken sich dabei auf das „knowledge-in-use“ (de Jong & Ferguson-Hessler, 1996, S. 105). Damit wählen sie gewissermaßen die erfolgreiche Anwendung des Wissens als Bezugspunkt. Zur Beschreibung des Wissens führen sie deshalb zwei Dimensionen ein, die Wissensformen und die Wissensqualitäten. Diese Unterscheidung halten sie für notwendig, damit keine weiteren Wissensformen postuliert werden, hinter denen sich eigentlich Qualitäten bereits bestehender Wissensformen verbergen. In ihrer eigenen Arbeit gehen de Jong und Ferguson-Hessler (1996) daher von insgesamt nur vier Wissensformen aus. Neben konzeptuellem und prozeduralem Wissen sind dies „Strategiewissen“ und „situational knowledge“. Dabei ist **situational knowledge** ein Wissen über Situationen, die domänenspezifisch auftreten. Die Fähigkeit in einer Problemsituation die relevanten Informationen auszuwählen und ergänzendes Wissen, welches außerhalb der Situation liegt, hinzu zu ziehen wird beispielsweise dem situational knowledge zugerechnet (de Jong & Ferguson-Hessler, 1996). Beispielsweise ist das Aufstellen einer Gleichung aus den Angaben einer Sachaufgabe heraus davon unabhängig, ob sich das Problem inhaltlich

mit Prozentrechnung oder Flächeninhalten befasst, und damit situationsbezogener, domänenspezifischer Art. Das situational knowledge zeigt zudem einige Überschneidung mit den Produktionen von Anderson, die sich als Wenn-Dann-Aussagen formulieren lassen. Sie dienen dazu eine Situation daraufhin zu untersuchen, ob der Einsatz eines bestimmten „Problemlöseoperators“ sinnvoll ist (Anderson, 1996). Dafür bietet sich wiederum eine (etwas komplexere) Sachaufgabe als Beispiel an: Angenommen, ein naheliegender Ansatz führt auf eine Gleichung mit zwei Variablen, dann lautet eine geeignete Wenn-Dann-Aussage „Wenn es mir gelingt eine weitere Gleichung zu generieren, in der die beiden Variablen sinnvoll miteinander kombiniert werden, beginne ich die erste Gleichung zu vereinfachen und z.B. nach einer Variablen aufzulösen!“.

Strategiewissen kann verschieden aufgefasst werden: Handelt es sich um eine eher konkrete Strategie, die „Art und Reihenfolge der Entscheidungen weitgehend determiniert“, so kommt sie einem Algorithmus gleich und kann eher dem prozeduralen Wissen zugerechnet werden (Edelmann, 2000, S. 216). Ein Beispiel ist etwa das systematische Suchen nach einer Nullstelle eines Polynoms um anschließend eine Polynomdivision durchzuführen. Während die Polynomdivision selbst eine reine Prozedur darstellt, bietet sich zum Finden der ersten Nullstelle noch eine gewisse Auswahl an Verfahren an, z.B. das systematische Ausprobieren oder das Faktorisieren. Dem Strategiewissen im engeren Sinne kommt im Zusammenhang mit dem Problemlösen eine entscheidende Bedeutung zu. Denn es ist nützlich um Problemlöseprozesse zu organisieren, z.B. in Form eines generellen Aktionsplans. In dem Fall handelt es sich dann eher um heuristische Regeln, die zu einer Eingrenzung des Suchraums für die Lösung führen (Edelmann, 2000). Eine solche Strategie ist etwa die Nutzung eines grafikfähigen Taschenrechners um Anhaltspunkte für die Lage der Nullstellen eines Polynoms zu bekommen. Eventuell werden nicht alle Nullstellen angezeigt oder die Anzeige ist möglicherweise zu ungenau, doch lassen sich hier die oben genannten Verfahren gezielt einsetzen und überprüfen. Das Strategiewissen kann verglichen mit den bisher betrachteten Wissensformen einen besonders hohen Grad an Allgemeinheit aufweisen (de Jong & Ferguson-Hessler, 1996). Eine Unterteilung in verschiedene Strategietypen liegt daher nahe. Mit solchen verschiedenen Strategietypen, wie z.B. Elaborations- und Organisationsstrategien arbeiten beispielsweise Richter und Kollegen (2005). Einige Strategien bezeichnet man auch als metakognitive Strategien, da sie kognitive Prozesse kontrollieren und regulieren (Pintrich & Schunk, 2002). In diesem Bereich überschneiden sich also metakognitives Wissen und Strategiewissen. Metakognitives Wissen umfasst aber noch weitere Erkenntnisse über kognitive Prozesse allgemein. Insofern kontrolliert es die anderen Wissensformen in der Weise, dass es über Lern- und Löseprozesse reflektiert und diese reguliert (Hasselhorn, 2001).

3.1.3 Zusammenhänge zwischen den Wissensformen

Deklaratives Wissen wird als Ausgangspunkt für Automatisierungsprozesse angesehen (Anderson, 1996; de Jong & Ferguson-Hessler, 1996). Diese Prozesse verlaufen über mehrere Phasen, an deren Ende die fertigen **Produktionen** (Bedingungs-Aktions-Regeln) stehen, führen dabei jedoch nicht zwingend zur Verdrängung des deklarativen Wissens (Anderson, 1996). Während dieser Umbau des deklarativen Wissens zu anderen Wissensformen auf der einen Seite sinnvoll erscheint, da er dem Problemlöser beim Bearbeiten einer Fragestellung einen ökonomischeren Umgang mit seinen kognitiven Ressourcen erlaubt (Anderson, 1983), führt er im Falle fehlerhaften Wissens zu Problemen, insbesondere dort, wo das explizite Wissen völlig ersetzt wurde (siehe Abschnitt 2.3.1).

Wird das deklarative Wissen bloß als schlichtes Faktenwissen verstanden, welches aus isolierten Informationseinheiten besteht, stellt der Begriff des konzeptuellen Wissens eine Erweiterung um die Relationen zwischen diesen isolierten Einheiten dar.

Die Begriffe „konzeptuelles“ und „prozedurales Wissen“ haben keine klaren Grenzen und vermögen insofern auch nicht die realen Wissensstrukturen genau abzubilden. Vielmehr handelt es sich bei beiden Begriffen um die Randpunkte eines Kontinuums (Rittle-Johnson et al., 2001). Während Ergebnisse von Studien mit jüngeren Kindern eher vermuten lassen, dass sich das konzeptuelle Wissen früher herausbildet als das prozedurale oder zumindest von Gleichzeitigkeit ausgegangen werden kann (vgl. Schneider, 2006), wird dies im Allgemeinen zurückgewiesen (Haapasalo & Kadijevich, 2000). Die letztgenannten Autoren vertreten die Meinung, dass die Frage, welche Wissensform Grundlage der anderen sei, außerhalb eines konkreten Kontexts nicht entscheidbar sei und weisen darauf hin, dass die Konstruktion von Aufgaben, die rein konzeptuelles oder rein prozedurales Wissen abfragen, nicht möglich sei. Neben diesen methodischen Gründen lässt sich bei jüngeren Kindern, die bisher nur ein fragmentarisches Wissen aufgebaut haben, schwer festlegen, ab wann davon gesprochen werden kann, dass sie über das betreffende Wissen verfügen (Rittle-Johnson et al., 2001). Genau dieses fragmentarische Wissen bildet für Rittle-Johnson und Kollegen (2001) den Ausgangspunkt um die Erweiterung des Wissens als einen iterativen Prozess anzusehen, bei dem das prozedurale Wissen von einer Anreicherung des konzeptuellen Wissens profitiert, und ebenso das konzeptuelle Wissen profitiert, wenn das prozedurale Wissen erweitert wird. Ein ähnlicher Ansatz geht davon aus, dass sich zunächst prozedurales Wissen auf der Grundlage konzeptuellen (Vor-)Wissens ausbildet. Im nächsten Schritt wird dann neues konzeptuelles Wissen aus der bewussten Reflexion über das prozedurale Wissen gewonnen (Engelbrecht et al., 2000). Die Besonderheit dieser Theorie besteht im Reflexionsschritt, der metakognitives Wissen

erfordert. Auf diese Weise trägt Metakognition also dazu bei neues oder zumindest erweitertes konzeptuelles Wissen zu erzielen. Dem Strategiewissen schließlich wird im Bereich des Problemlösens eine besondere Relevanz zugesprochen. An Problemlöseprozessen sind zunächst einmal Wissens Elemente konzeptueller und prozeduraler Art gemeinsam beteiligt, die unter Nutzung einer breiten Auswahl von Strategien schließlich die Problemlösung herbeiführen können (NYS-Board, 2005). Eine enge Verknüpfung strategischer Entscheidungen mit konzeptuellem Wissen wird von Hiebert und Lefevre (1986) angenommen, wobei das konzeptuelle Wissen strategische Entscheidungen stark beeinflusst.

3.2 Modelle von Wissensqualitäten

Die Qualität erworbenen Wissens zeigt sich zumeist in Anwendungs- und Problemlösesituationen. Wie die Beurteilung des Wissens dann ausfällt, hängt von Faktoren wie der Transferierbarkeit oder Generalisierbarkeit des Wissens ab und von den Möglichkeiten externe Informationen einzubinden.

3.2.1 Das Modell der Wissensqualitäten nach de Jong und Ferguson-Hessler

Ein allgemeines Modell von Wissensqualitäten stammt von de Jong und Ferguson-Hessler (1996). Zunächst stellen sie dazu die verschiedentlich verwendeten Qualitätsmaße vor. Sie stellen dabei fest, dass es einige Qualitäten gibt, die eher Relationen zuzuschreiben sind und andere, die den Begriffen zuzuordnen sind. Weiter beziehen sich die Begriffe vielfach nur auf spezielle Wissensbereiche oder aber sind gänzlich allgemein, wie die Benennung des Wissens als „tief“ (de Jong & Ferguson-Hessler, 1996). Dieser Begriff wird mit einer guten Einbindung des Wissens in allgemeinere Wissensstrukturen, sowie mit Verständnis und Transferierbarkeit des Wissens assoziiert. Als entgegengesetztes Attribut zu „tief“ wird im Zusammenhang mit Wissen häufig „oberflächlich“ verwendet. „Oberflächliches Wissen“ wird eher mit Reproduktion und Auswendiglernen in Verbindung gebracht (de Jong & Ferguson-Hessler, 1996). Diese beiden Attribute bilden die Endpunkte des Kontinuums, dass für die Autoren das Qualitätsmaß „Level“ darstellt. In ähnlicher Weise werden die Qualitätsmaße, „Vernetztheit/Struktur“, „deklaratives/automatisiertes Wissen“, „Modalität“ (verbal/piktoral) und „Allgemeinheit“ (allgemein/domänenspezifisch) definiert. Diese Qualitätsmaße von Wissen werden von de Jong und Ferguson-Hessler (1996) für die Wissensformensituationsbezogenes, konzeptuelles, prozedurales und strategisches Wissen erklärt. In der Tabelle 3.1 werden lediglich die drei Qualitätsmaße „Level“, „Struk-

tur“ und „Automatisierung“ nachvollzogen, da die übrigen im Zusammenhang dieser Arbeit nicht weiter relevant sind.

Die Beispiele in den einzelnen Zellen von Tabelle 3.1 machen deutlich, dass die Qualitäten keine voneinander unabhängigen Kategorien beschreiben, z.B. lassen sich die Qualitätsmaße „Level“ und „Struktur“ für den Bereich des prozeduralen Wissens kaum unterscheiden. So gilt, wenn für „Level“ Regeln und Rezepte als oberflächlich gelten und dem bedeutungsvollen Handeln gegenüberstehen, natürlich auch, dass die als oberflächlich bezeichneten Rezepte ihrer Struktur nach „isoliert“ vorliegen. Speziell auf die Abhängigkeit der Qualitätsmaße Level und Struktur, gerade in Bezug auf das strategische Wissen, weisen de Jong und Ferguson-Hessler (1996) selbst besonders hin. Den Wert ihres Modells sehen sie außer in einem Beitrag zur Aufklärung von Wissensstrukturen darin, dass es zum einen als Grundlage dient um sich Forschungsfragen im Bereich des Problemlösens zu nähern und zum anderen in der Bewertung von Verfahren zur Wissensüberprüfung.

3.2.2 Wissensqualitäten konzeptuellen und prozeduralen Wissens

Hiebert und Lefevre (1986) betrachten die Relationen zwischen den Begriffen auf zwei unterschiedlichen Ebenen, die sich hinsichtlich ihres Abstraktionsgrades unterscheiden. Ein wachsender Abstraktionsgrad bedeutet immer die zunehmende Loslösung von spezifischen Kontexten. Die erste Ebene zeichnet sich aus durch eine gleiche oder niedrigere Abstraktionsstufe der Relation im Vergleich zu den Begriffen, die über diese Relation miteinander verbunden sind. Die zweite Ebene, auf der die Relation einer höheren Abstraktionsstufe angehört als die Begriffe, bezeichnen die Autoren als Reflexionslevel. Diese Benennung entspricht der Auffassung, dass der Aufbau von Relationen zwischen Objekten (mit unterschiedlichen Oberflächenmerkmalen aber struktureller Ähnlichkeit) nur unter Einbeziehung von Reflexionsschritten erfolgen kann (Hiebert & Lefevre, 1986).

Auch für das prozedurale Wissen werden verschiedene Stufen definiert. Aufgrund der sequentiellen Struktur kann man eine Klassifizierung derart vornehmen, dass es ganze Prozedurensysteme und einzelne, darin enthaltene, Subprozeduren gibt (Hiebert & Lefevre, 1986). Die Prozedurensysteme stellen die elaboriertere Variante dar und verfügen auch über Organisationsstrukturen, die die Auswahl der Subprozeduren regeln. Bezogen auf die Differenzialrechnung stellt etwa das symbolische Differenzieren eine einfache Prozedur dar, die – abgesehen von der Fähigkeit zu entscheiden, welche Regel die jeweils geeignete ist – rein algorithmisch anzuwenden ist. Das graphische Differen-

Qualität	Wissensformen			
	situations- bezogen	konzeptuell	prozedural	strategisch
Level oberfl. ↔ tief	Fall-basierte Argumen- tation ↔ Übersetzung in domänen- weite Begriffe	Symbole und Formeln ↔ Begriffe und Relationen	Regeln / Rezepte / algebraische Manipulation ↔ Fähigkeit zu bedeu- tungsvollem Handeln	symbolgeleitete Suche nach Formeln ↔ Möglichkeiten der Analyse und Planung
Struktur isoliert ↔ vernetzt	Kenntnis einzelner Merkmale ↔ gruppierte Information (d.h. Situati- onsmodelle)	unabhängige Begriffe und Gesetze ↔ bedeutungs- volle (hier- archische) Begriffsstruk- tur	isolierte Al- gorithmen ↔ Handlungen mit Bezug zu Begriffen oder Prinzipien	isolierte Handlungen ↔ kohärente Mengen von sequentiellen Handlungen
Auto- mati- sierung deklar. ↔ automat.	bewusstes, schrittweises Vorgehen ↔ automatische Übersetzung in domänen- weite Begriffe	Verbalisierung von Prinzi- pien, Defi- nition, etc. ↔ intuitives (implizites) Verständnis	Bewusste Auswahl der Prozeduren und schritt- weise Aus- führung ↔ automatischer Zugriff und routinemäßige Ausführung	schrittweise Auswahl und Planung ↔ automatische Analyse und Planung; paralleler Abgleich

Tabelle 3.1: Wissen in Abhängigkeit von Wissensform und -qualität (übersetzter Ausschnitt aus de Jong und Ferguson-Hessler (1996)).

zieren ist dagegen schon eher als Prozedurensystem zu bezeichnen, da etwa das Identifizieren spezieller Punkte des ursprünglichen Graphen, das Eintragen von Steigungsdreiecken bzw. das Abschätzen der Steigung und schließlich das Einzeichnen des Ableitungsgraphen als Subprozeduren angesehen werden können.

Bei anderen Autoren erfahren konzeptuelles und prozedurales Wissen erst in der engen Verknüpfung miteinander und in der gemeinsamen Anwendung zur Lösung von Problemen eine höhere Qualitätsbewertung. Ein bekanntes Beispiel ist der folgende Ansatz von Gray und Tall (1992).

3.2.3 Das „procept“-Konzept nach Gray und Tall

Der zentrale Begriff dieser Theorie, **procept**, setzt sich aus den Bezeichnungen „process“ und „concept“ zusammen. Außer diesen beiden Sichtweisen auf Begriffe beinhalten procepts bedeutungsbehaftete Symbole, die so beschaffen sind, dass sie es dem Träger dieses Wissens erlauben nahtlos zwischen der Betrachtung als concept und als process hin- und herzuwechseln (Gray & Tall, 1992). Ausgangspunkt der Entwicklung von procepts sind nach Ansicht der Autoren Prozeduren. In einem Performanz-Spektrum mit verschiedenen Zwischenstadien werden die beobachtbaren Fähigkeiten im Umgang mit Problemen dargestellt. Auf der untersten Stufe, auf der ein Individuum allein über Prozeduren verfügt, scheitert es noch am Problem. Dann gelingen Teillösungen und Standardprobleme, danach die flexible Lösung unter Berücksichtigung alternativer Lösungswege und schließlich auf der Stufe des procepts das Nachdenken über Mathematik „in Symbolen“ (Gray & Tall, 2001, S. 69).

3.2.4 Stufenmodelle der Mathematikdidaktik zum Begriffsverständnis

Etwas anders sind die Stufenmodelle der Mathematikdidaktik ausgerichtet. Sie dienen vor allem der konkreten Unterrichtsplanung. Dass hier Begriffe und ihre Beziehungen eine so zentrale Rolle einnehmen, liegt vermutlich an fachspezifischen Strukturen in der Mathematik. Ein besonders bekanntes Beispiel solcher Modelle hat Vollrath (1999) entwickelt (siehe Tabelle 3.2), wobei er insbesondere fordert „ein Lernen in Stufen zu organisieren“ (Vollrath, 1999, S. 137). Die Kenntnis der theoretischen Betrachtungen des Modells soll den Lehrenden unmittelbar darin unterstützen Lernprozesse bei den Schülern anzubahnen. Es handelt sich hierbei allerdings um ein rein fachgebundenes Modell, für das im Gegensatz zu den Modellen, die die Beschreibung von Kognitionen zum Ziel haben, keine empirische Überprüfung beabsichtigt ist.

Einen wichtigen Begriff stellt beispielsweise der Funktionsbegriff dar. Anhand dieses Begriffs hat Vollrath (1999) seine Betrachtungen zum Begriffsverständnis entwickelt und ein Stufenmodell dazu aufgestellt.

Begriffsverständnis	der Begriff als ...
das intuitive Verständnis	Phänomen
das inhaltliche Verständnis	Träger von Eigenschaften
das integrierte Verständnis	Teil eines Begriffsnetzes
das formale Verständnis	Objekt zum Operieren
das kritische Begriffsverständnis	Ausgangspunkt weiterer Diskussionen

Tabelle 3.2: Stufen des Begriffsverständnisses nach Vollrath (1999)

Das Modell umfasst die fünf Stufen, intuitives, inhaltliches, integriertes, formales und kritisches Begriffsverständnis, die in Tabelle 3.2 aufgelistet sind. Dieses Modell wird hier nun stellvertretend für andere Modelle, etwa zum Folgenbegriff (Weigand, 1993), vorgestellt. Graduell unterschiedliche Schwerpunktsetzungen auf verschiedenen Stufen müssen allein schon aufgrund der Verschiedenheit der Begriffe auftreten. Die Grundstruktur der fünf Stufen von Vollrath (1999) ist jedoch übertragbar.

Auf der Stufe des **intuitiven Begriffsverständnisses** wird dem Lernenden der Begriff als Phänomen vorgestellt. Neben der Bezeichnung werden wichtige Vertreter des Begriffs kennengelernt. Der Begriff kann lediglich zur Lösung sehr einfacher Probleme herangezogen werden.

Mit dem **inhaltlichen Begriffsverständnis** wird die Stufe bezeichnet, die sich insbesondere den Eigenschaften des Begriffs zuwendet. Es wird allmählich der Begriffsinhalt spezifiziert; Eigenschaften werden danach eingeteilt, ob sie für den Begriff relevant sind. Teilweise werden Argumente für bestimmte Eigenschaften gegeben, teilweise wird mit diesen Eigenschaften argumentiert, um z.B. die Zugehörigkeit bestimmter (grenzwertiger) Objekte zu einem Begriff zu begründen.

Ab der nun folgenden Stufe, dem **integrierten Begriffsverständnis**, wird ein Begriffsnetz aufgebaut. Zum einen können die Eigenschaften nun formal verwendet werden, was z. B. zur Formulierung exakter Definitionen notwendig ist. Zum anderen werden Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Eigenschaften erkannt. Damit wird es möglich Äquivalenzen zu erkennen.

Erreicht der Lernende die Stufe des **formalen Begriffsverständnisses**, kann er mit dem Begriff operieren. Verschiedene Eigenschaften werden sicher verknüpft und zur Lösung auch komplexerer Probleme herangezogen.

Schließlich erwähnt Vollrath (1999) noch das **kritische Begriffsverständnis**, was er allerdings nur für die Oberstufe formuliert. Gegenstand der Betrachtung sind dabei Definitionen und zu ihnen äquivalente Aussagen. Auch über die Auswirkungen kleinerer Abwandlungen kann dabei diskutiert werden.

Die inhaltlichen Ausführungen zu diesen Stufen zeigen, dass auf den ersten Stufen Merkmale und Eigenschaften des Begriffs kennen gelernt und strukturiert werden und auf den weiteren Stufen der Fokus gewissermaßen erweitert wird und der Zugewinn im Verstehen von Zusammenhängen und Kennenlernen von Relationen zu anderen Begriffen besteht.

Festzuhalten bleibt, dass sich die Entwicklung vieler zentraler Begriffe über die gesamte Schulzeit oder gegebenenfalls noch darüber hinaus vollzieht.

Die Stufen des Begriffsverständnisses sind damit nur teilweise als hierarchisch anzusehen. So leuchtet es ein, dass zunächst die definierenden Eigenschaften eines Begriffs bekannt sein müssen, bevor das Erkennen von Zusammenhängen zu anderen Begriffen Erfolg verspricht. Dennoch kann der Begriff immer wieder auf so gut wie allen Stufen ergänzt werden. Dies gilt umso stärker je abstrakter und komplexer ein Begriff ist.

3.2.5 Zusammenfassung und Bewertung

Zu Beginn dieses Kapitels wurden die verschiedenen Wissensformen vorgestellt, die in der Psychologie unterschieden werden. Für die Forschung hat sich insbesondere die Unterscheidung zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen als praktikabel erwiesen, wobei in neueren, gerade mathematikdidaktischen Veröffentlichungen, die Bezeichnung „konzeptuell“ die Bezeichnung „deklarativ“ dominiert. Von daher wird hier nun auch weiter vom konzeptuellem und vom prozeduralen Wissen die Rede sein. Beide Wissensformen lassen sich in der Theorie relativ gut voneinander und von anderen Wissensformen abgrenzen. In der Praxis hängen konzeptuelles und prozedurales Wissen weit stärker zusammen, als die hier vorgestellten Theorien suggerieren. Dass die Frage, ob nun prozedurales Wissen Grundlage konzeptuellen Wissens sei oder, ob es sich gerade andersherum verhalte, bereits vielfach diskutiert wurde, ist nur ein Indiz dafür.

Die Theorie, dass ein Individuum durch den Erwerb weiteren prozeduralen bzw. konzeptuellen Wissens auch Zugewinne bezüglich des konzeptuellen bzw. prozeduralen Wissens erwarten darf (Rittle-Johnson et al., 2001), basiert auf ebendieser Auffassung einer engen Verzahnung beider Wissensformen. Zur Überprüfung dessen sind verbindliche und operationalisierbare Qualitätsmaße wünschenswert. Hilfreiche Ansätze dazu liefern die in Abschnitt 3.2 vorgestellten Modelle von Wissensqualitäten. So geben de Jong und Ferguson-Hessler (1996) eine Anzahl an Qualitätsdimensionen und deren Randpunkte an. Sie le-

gen sich jedoch nicht auf eine Domäne fest und formulieren auch keine feineren Abstufungen für die einzelnen Qualitätskalen. Dagegen beschreiben Hiebert und Lefevre (1986) die Qualitäten des konzeptuellen und des prozeduralen Wissens für die Mathematik genauer. Sie haben außerdem den Anspruch diese Qualitäten in eine konsistente Theorie über Gedächtnis und Struktur des Wissens einzubetten. Das Qualitätsmaß des konzeptuellen Wissens ist dabei die Abstraktheit bzw. Kontextgebundenheit, während es für das prozedurale eher Umfang und Struktur sind, die den Unterschied begründen. Speziell das Qualitätsmaß der Kontextspezifität wird nachfolgend wieder aufgegriffen. Anders wird die Qualität in der abschließend dargestellten procept-Theorie verstanden. Hier stellt sie sich als ein Maß der Verknüpfung von konzeptuellem und prozeduralem Wissen dar, die über Symbole ausgedrückt wird. Die procept-Theorie folgt somit der Annahme, dass eine enge Verknüpfung zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen besteht bzw. erforderlich ist. Auch dieses Qualitätsmaß wird weiterhin in dieser Arbeit eine Rolle spielen. Ein mathematisches Gebiet, in dem Symbole sowohl Prozesse als auch Objekte repräsentieren, ist die Differenzialrechnung. Dieses Gebiet reicht von der Idee der Ableitung als Grenzwert eines unendlichen Prozesses, die im Laufe des Unterrichtsgangs automatisiert angewendet wird, bis zu anwendungsbezogenen Aufgaben, die teils reichhaltiges Zusammenhangswissen erfordern. Die Differenzialrechnung und insbesondere der Ableitungsbegriff sind daher in besonderem Maße geeignet um Wissensstrukturen im Hinblick auf Wissenstypen und Wissensqualitäten zu untersuchen.

Kapitel 4

Der Begriff der Ableitung im Mathematikunterricht

*Unbegrenztheit und Endlichkeit aber
schließen einander nicht aus.
... die mathematische Analysis
gewissermaßen eine einzige Symphonie
des Unendlichen.*

David Hilbert:
Über das Unendliche.

Die Differenzialrechnung ist ein wichtiger Bereich der Mathematik und ein zentraler Bestandteil der Analysis. Sie ist daher ein traditionelles Thema des Mathematikunterrichts der 11. Jahrgangsstufe, wobei es aber auch in den letzten zehn Jahren noch zu Verschiebungen im Stellenwert der Begriffe „Ableitung“ und „Grenzwert“ in den Curricula und folglich in den Lehrbüchern gekommen ist. So wurde etwa der Grenzwert vormals explizit als „der grundlegende Begriff der Analysis“ betitelt (Kultusministerium Niedersachsen 1991). Im aktuellen Lehrplan von Schleswig-Holstein kommt etwa das Wort „Grenzwert“ gar nicht vor, wohingegen moderne Anwendungen stark betont werden (IQSH Schleswig-Holstein, 2002). Die Betrachtung von Folgen und deren Konvergenzverhalten ist in vielen Bundesländern ganz aus den Lehrplänen verschwunden bzw. wird als optionales Thema angeführt (ISB Bayern, 1990).

Wie viele Bereiche der Analysis, geht auch die Differenzialrechnung auf ein geometrisches Problem zurück, das Problem der Konstruktion von Tangenten an beliebige Kurven in der Ebene. Dieses Problem war lange bekannt, bevor es schließlich gegen Ende des 17. Jahrhunderts gelöst werden konnte. Newton und Leibniz gelangten unabhängig voneinander zu der Lösung. Während Leibniz das ursprüngliche, geometrische Problem löste, welches auch unter dem Namen

Tangentenproblem bekannt ist, benötigte Newton „diese Art von Mathematik zur Beschreibung und Lösung von Problemen aus der Mechanik“ (Stry & Schwenkert, 2006, S. 194), etwa zur Bestimmung von Momentangeschwindigkeiten. Zu ihren Lösungen kamen beide nur über einen infinitesimalen Prozess. Dieser Prozess bzw. der ihn umfassende Begriff des Grenzwertes, der früher den Mathematikern Schwierigkeiten bereitete, kann mit Recht auch in der Schule als eine Herausforderung angesehen werden (siehe zu den Schwierigkeiten auch Abschnitt 4.2.1), denn schließlich stellt der Begriff des Grenzwertes eine der ersten Begegnungen der Schülerinnen und Schüler mit dem Unendlichen dar.

4.1 Zugänge zum Ableitungsbegriff aus fachmathematischer und didaktischer Perspektive

Es werden nun drei Zugänge vorgestellt, das Tangentenproblem, die Steigung des Graphen in einem Punkt und die Änderungsrate. Dabei werden insbesondere die ersten beiden häufiger für den Unterricht gewählt. Jede Variante wird zum einen von seinem mathematischen Inhalt und zum anderen von didaktischer Perspektive aus dargestellt.

4.1.1 Das Tangentenproblem

Zu den üblichen Wegen die Differenzialrechnung im Unterricht einzuführen gehören die geometrischen Zugänge. Einen solchen Zugang stellt das so genannte Tangentenproblem dar.

Mathematisch gesehen wird dabei ausgehend vom Tangentenbegriff am Kreis nach einer Tangente an den Graphen einer beliebigen Funktion gesucht. Dies geschieht über die Betrachtung von zwei Punkten auf dem Graphen, durch die eine Sekante gelegt wird. Der eine Punkt P ist dabei fest, während sich der andere (nahe P) auf P zu bewegt. Somit nähert sich die Sekante zunehmend der Lage der Tangente im Punkt P an. Der Grenzwert dieser Folge von Sekanten ist damit die Tangente.

Aus didaktischer Perspektive liegen die Vorteile dieses Vorgehens in der konkreten graphischen Anschauung des Problems, bei der gleichzeitig offensichtlich wird, dass hier der Gebrauch des Tangentenbegriffs, wie er im Fall des Kreises üblich ist, nicht mehr ausreicht. Begriffsinhalt und -umfang (siehe Abschnitt 1.1.1) erfahren somit eine Erweiterung. Auch die direkte Anbindung des Tangentenbegriffs an den Grenzwertbegriff wird auf diese Weise gewährleistet. Ein Problem ergibt sich allerdings für den unterrichtlichen Kontext daraus, dass der Tangentenbegriff in seiner präzisen Definition auf dem der Ableitung aufbaut, mit der Idee der Tangente aber bereits vorher gearbeitet und argumentiert

wird. Im Sinne des Conceptual Change (siehe Abschnitt 2.2) ist somit eine Reorganisation bereits vorhandener Wissensstrukturen vonnöten, die oft nur unter begünstigenden Bedingungen, wie sie etwa in Tabelle 2.1 zusammengestellt sind, zu erreichen ist. Außerdem bleibt anzumerken, dass das Thema über das Tangentenproblem rein innermathematisch motiviert ist, was eventuell nur einen Teil einer Lerngruppe anspricht.

4.1.2 Die Steigung des Graphen in einem Punkt

Neben dem Tangentenproblem ist auch die Steigung des Graphen in einem Punkt ein möglicher Problemgrund – häufig auch in Anwendungskontexten, in denen die Steigung eines Weges an einer Stelle, die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs zu einem Zeitpunkt o.ä. gesucht werden.

Die Mathematik zeigt sich hier ein wenig anders, denn der Status des Begriffs der Tangente wird leicht verschoben, indem er hier eher zur Methode wird und nicht mehr Kern der Betrachtung ist. Ansonsten ist dieser Zugang dem ersten jedoch recht ähnlich.

Im Unterricht wird insbesondere das Verhältnis von der Steigung eines Graphen in einem Punkt zur Steigung der Tangente in diesem Punkt zu thematisieren sein. Als unterstützende Werkzeuge können hier graphikfähige Taschenrechner mit einer Zoom-Funktion dienen, die die Umgebung um einen Punkt P bei genügend großer Auflösung als (fast) gerade erscheinen lassen.

4.1.3 Die Änderungsrate

Einen weiter gefassten Zugang bietet der Begriff der Änderungsrate, da sie für den Unterricht rechnerische wie graphische Ansatzpunkte bietet.

Aus der Perspektive der Mathematik betrachtet führt der Grenzprozess ausgehend von der durchschnittlichen Änderungsrate zum Begriff der momentanen Änderungsrate. Die momentane Änderungsrate ist die zentrale Idee. Momentangeschwindigkeiten und lokale Steigungen sind ausschließlich Konkretisierungen, die sich unmittelbar aus dem Rückbezug auf den Begriff der momentanen Änderungsrate ergeben.

Dagegen wird der Begriff der momentanen Änderungsrate nach didaktischen Gesichtspunkten den oben genannten Spezialfällen eher nachgeordnet (siehe dazu Abschnitt 4.2.3). Der Begriff der Änderungsrate wird als Abstraktion betrachtet, die – sofern überhaupt – erst nach genügend vielen und ausführlich behandelten konkreten Beispielen im Unterricht eine Rolle spielt⁵. Häufig

⁵Hier zeichnen sich jedoch neue Entwicklungen ab, wie z.B. im zeitlich befristeten Lehrplan für das G9 in Niedersachsen (Nds. Kultusministerium, 2006), der eine Betonung des Änderungsverhaltens vorsieht.

wird der rechnerische Aspekt in Anwendungskontexten wie dem Wachstum von Bakterienkolonien oder dem Zerfall einer Portion eines radioaktiven Stoffs über die Zeit behandelt, wobei die Änderungsrate dann häufig als Wachstums- bzw. Zerfallsrate bezeichnet wird (siehe Abschnitt 4.2.3). Zur Bestimmung des Grenzwertes etwa der durchschnittlichen Wachstumsrate wird dann die Differenz der Populationsgrößen für beliebig kleine Zeitintervalle betrachtet.

Ein moderner, den graphischen Aspekt betonender Ansatz besteht darin, dass sich zunächst eine Person durch den Raum bewegt und dabei ab und an Geschwindigkeit und Richtung ändert. Mittels moderner Detektoren und spezieller Software wird die Geschwindigkeit zum einen gemessen und zum anderen direkt in eine graphische Form übersetzt, die dann am Computer betrachtet werden kann. Der Vorteil dieser Methode wird hier in der direkten Verbindung der Situation mit dem Graphen gesehen. Verwendet wurde diese Methode beispielsweise in der Studie von Castro-Filho et al. (2005). Generell bietet der Zugang über die Änderungsrate die beste Gelegenheit den Mehrwert der Angabe eines Wertes für die Ableitung gegenüber der eines (Funktions-)Wertes herauszustellen. Dazu können solche Beispiele thematisiert werden, in denen statt des Ist-Zustandes die Entwicklungen (z.B. Bevölkerungsstatistik, Wirtschaftswachstum) und die Trends (z.B. Börsentrend, Wettertrend) interessieren. Eine umfangreiche Motivation in dieser Richtung stellt die Einführung in „Differenzieren – Do it yourself“ dar (Wong et al., 2003).

4.2 Aspekte des Ableitungsbegriffs

4.2.1 Facetten und Interpretationen des Ableitungsbegriffs aus mathematikdidaktischer Perspektive

Den Ableitungsbegriff zeichnen seine verschiedenen Facetten und Repräsentationsformen aus. Zunächst ist die Ableitung das Ergebnis eines unendlichen Prozesses. Die Annäherung an diesen Prozess wird jedoch (gezwungenermaßen) mit endlichen Methoden vorgenommen: „Die Begriffe Tangente, Momentangeschwindigkeit, momentane Änderungsrate können prinzipiell nur [...] über einen unendlichen Prozess gebildet werden“ (Wong et al., 2003). Jeder Schritt in einem solchen Prozess stellt eine Näherung an die gesuchte Größe dar, wobei diese Näherungen immer besser werden. Ziel ist, „auf das Ende“ dieses aus unendlich vielen Schritten bestehenden Prozesses zu „extrapolieren“ (Wong et al., 2003). Dieses Zitat beinhaltet den entscheidenden Konflikt, stehen sich doch ein Begriff, der wesentlich vom Aspekt der Unendlichkeit bestimmt wird, und eine Anzahl von Algorithmen gegenüber, die aus nur endlich vielen Schritten bestehen (Giraldo & Carvalho, 2005). Doch das Spannungsfeld lässt sich noch

in eine andere Richtung erweitern. An zahlreichen Beispielen verschiedener mathematischer Gebiete arbeiteten Gray und Tall (1992) heraus, dass Symbole in grundsätzlich unterschiedlicher Funktion, als Objekt und als Prozess auftreten bzw. anzuwenden sind (siehe Abschnitt 3.2.3). Diese Beschreibung sehen Gray und Tall (2001) auch für die Ableitung als zutreffend an. Schließlich tritt die Ableitung sowohl als Objekt, als Graph oder Kalkül, als auch als (unendlicher) Prozess der Differentiation auf. Alle diese Aspekte vereint das Symbol des Differenzialquotienten ($\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ bzw. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$). Weiterhin unterscheiden sich die Verfahren zur Bestimmung von Ableitungen sowohl in ihrer Exaktheit als auch im Anspruch bezüglich des Umgangs mit Symbolen und Formalia. Sie reichen von der graphischen Bestimmung der Ableitung über das schrittweise Berechnen des Grenzwertes bis zum Anwenden der „fertigen“ Ableitungsregeln, wie etwa Summen- oder Produktregel. Darüber hinaus liegen Unterschiede im Umfang der Bearbeitung und in dem Maß, in dem auch konzeptuelles Wissen eine Rolle spielt. Haben beim symbolischen Differenzieren beide Aspekte, Umfang und konzeptuelles Wissen, kaum Bedeutung, so besteht das graphische Differenzieren aus verschiedenen Schritten, wie der Interpretation der Ableitung als Steigung, dem Eintragen von Steigungsdreiecken und schließlich der Übertragung auf den Graphen der Ableitungsfunktion (siehe Abschnitt 3.2.2). Alle zuvor genannten Verfahren fügen sich gewissermaßen in ein Schema (des Differenzierens), wie es in Abschnitt 2.1 beschrieben wird. Die Menge an symbolischen Darstellungen ist aufgrund einer uneinheitlichen Verwendung nochmals größer als die Zahl der Verfahren selbst: So wird beispielsweise beim Grenzübergang einmal der Grenzwert „von x gegen x_0 “ bestimmt, bei der so genannten h -Methode dagegen „von $x_0 + h$ gegen x_0 “, indem h unendlich klein wird. Neben symbolischen Repräsentationen der Ableitung spielen die graphischen Aspekte eine große Rolle, da sie wiederum Vorstellungen und Ideen für algebraische Fragestellungen liefern und bei der Kontrolle und Interpretation von Ergebnissen aus Anwendungsproblemen helfen können (Artigue, 1991; Fraunholz, 1992). Bedeutsam ist der Ableitungsbegriff darüber hinaus in unterschiedlichsten Anwendungskontexten.

Für ein Verständnis des Ableitungsbegriffs ist es notwendig ein Schema (verstanden wie in Abschnitt 2.1) verschiedener Prozeduren und Vorstellungen aufzubauen. Dazu gehören zunächst (angelehnt an Malle, 1999, 2003; vom Hofe, 1998; Hähkiöniemi, 2005) neben den Techniken des Differenzierens,

- graphisches Differenzieren,
- Differenzieren per Grenzwertbildung und
- Differenzieren durch Formelmanipulation (bzw. symbolisches Differenzieren),

die graphische, die rechnerische und die symbolische Deutungsebene:

- Auf der graphischen Ebene gibt es die Vorstellungen des Differenzialquotienten
 - als Steigung in einem Punkt des Graphen,
 - als Steigung der Tangente in einem Punkt und
 - als Änderungsrate (ein dynamischer, relativ universeller Aspekt).
- Die rechnerischen Deutungen beziehen sich auf
 - die Berechnung eines Wertes für die Steigung/eines Maßes für die Steilheit des Funktionsgraphen,
 - die Berechnung eines Faktors, mit dem die Änderung der Argumente in der Nähe eines festen Punktes zu multiplizieren ist, um die Änderung der Werte zu approximieren und
 - die Bestimmung des Verhältnisses des Funktionswertes relativ zum Argument.
- Auf der symbolischen Ebene gilt es Schreibweisen für den Differenzialquotienten zu verstehen und anzuwenden. Das sind
 - der Differenzialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten,
 - der Differenzialquotient als Kalkül und
 - das Vorzeichen des Differenzialquotienten als Richtung der Steigung.

Die hier dargestellten Fähigkeiten und Vorstellungen beschreiben ein Schema des Ableitungsbegriffs. So stellen beispielsweise die Techniken des Differenzierens Sub-Schemata bzw. genauer Sub-Skripts dar, die sich etwa in der Art formulieren lassen, wie es Abbildung 2.1 für einfache Textaufgaben zeigt. Insgesamt wird in dem Schema zwar schon ein recht umfangreiches Begriffsnetz abgebildet, dennoch sind eine Vielzahl von Ergänzungen denkbar. So kann das Schema etwa im Bereich der Deutung als Änderungsrate Leerstellen aufweisen, die durch spezielle Änderungsraten (siehe Abschnitt 4.1.3), z.B. Preissteigerungsraten oder Zerfallsraten, besetzt werden können.

Eine neue Kategorie bildet sich nach dem in Abschnitt 1.1.3 dargestellten Modell des Schemaerwerbs aus, indem recht ähnliche Erfahrungen bzw. Probleme, die ähnlich zu lösen sind, häufiger auftreten. Möglicherweise wird die Änderungsrate somit selbst zur Kategorie, der die Spezialfälle aus Anwendungsbeispielen dann zugeordnet werden.

Eine Liste verschiedener speziellerer Deutungen aus den Anwendungskontexten, die beispielsweise neben den üblichen physikalischen Interpretationen als momentane Geschwindigkeit oder Beschleunigung auch den Grenzsteuersatz als Anwendung aus der Wirtschaft umfasst, findet sich bei Blum und Kirsch (1996) oder im schon genannten Buch (siehe Abschnitt 4.1.3) von Wong und Kollegen (2003).

Als ergänzenden Aspekt zum Grenzwert betonen Giraldo und Kollegen (2003) die Wichtigkeit der Vorstellung der „local straightness“, wonach zum Aufbau des Ableitungsbegriffs die Idee, dass ein Graph auf einem infinitesimal kleinen Stück gerade erscheint, eine bedeutende Voraussetzung darstellt.

4.2.2 Relationen des Ableitungsbegriffs zu anderen Begriffen

Der Begriff der Ableitung in einem Punkt basiert auf dem des Differenzenquotienten und dem des Grenzwerts. Betrachtet man dann statt der Ableitung in einem Punkt die Ableitungsfunktion, so wird in diesem Zusammenhang natürlich auch der Funktionsbegriff wichtig (Orhun, 2005). Zudem erfahren andere Begriffe im Zusammenhang mit dem Ableitungsbegriff eine Erweiterung, z.B. der Steigungs- oder der Tangentenbegriff. Mit dem Voranschreiten des Kurses kommen Begriffe wie z.B. Stetigkeit, Monotonie, Maximum und Minimum hinzu. Noch andere Begriffe bauen erst auf dem Ableitungsbegriff auf, wie z.B. Wendepunkt oder spezieller Terrassen- oder Sattelpunkt.

Ein Aspekt, der speziell für den Ableitungsbegriff zutrifft, ist die doppelte Begriffsverwendung als „Ableitung in einem Punkt (eines Graphen)“ und als „Ableitungsfunktion“ (siehe auch Abschnitt 2.3.1 auf Seite 26). Um diesen Unterschied zu erfassen ist nach Meinung von Asiala und Kollegen (1997) der Zusammenhang zwischen der Ableitung in einem Punkt und der Steigung der Tangente in diesem Punkt des Graphen zentral.

4.2.3 Schwerpunkte in Lehrplänen und Richtlinien

Die im vorangegangenen Abschnitt aufgeführten Zugänge werden auch in den Lehrplänen der einzelnen Länder abgebildet. Man kann somit davon ausgehen, dass die obigen Darstellungen im regulären Mathematikunterricht eine Rolle spielen. Der aktuelle bayerische Fachlehrplan für die 11. Klasse (ISB Bayern, 1990, S. 29) betont, dass der Ableitungsbegriff als „bedeutender Fortschritt in der Entwicklung der Mathematik“ herauszustellen ist:

Die Schüler sollen erfahren, wie sich das Änderungsverhalten einer Funktion durch die Ableitungsfunktion präzise beschreiben lässt

[...]. Ihr bisheriges Instrumentarium zur systematischen Untersuchung reeller Funktionen wird so entscheidend vergrößert (ISB Bayern, 1990).

Die Momentangeschwindigkeit sowie die Geschwindigkeit chemischer Reaktionen werden explizit als zu behandelnde Bezüge zur Physik und zur Chemie genannt (ISB Bayern, 1990, S. 29).

Ein ähnliches Bild geben auch die Richtlinien einiger der anderen Länder, die die Behandlung der Ableitung als Steigung der Tangente und als Steigung im Graphen vorsehen und ebenfalls die Einbeziehung verschiedener Anwendungskontexte fordern, wie z.B. beschleunigte Bewegungen oder die „Beziehung zwischen Gewinn und Absatz bei Monopolen“ (IQSH Schleswig-Holstein, 2002). Der hessische Lehrplan sieht zudem explizit die Betrachtung des Grenzwertes des Differenzenquotienten als „Stabilisierungsprozess“ vor (Hessisches Kultusministerium, 2002). Das heißt, im Mathematikunterricht sind Beispiele zu behandeln, die nachweisen, dass die endliche, iterative Annäherung eines unendlichen Prozesses brauchbare Abschätzungen für einen Grenzwert liefert, wobei die Exaktheit in jedem Durchgang zunimmt.

Ebenso wird die Bedeutung der Relationen zu anderen Begriffen in den verschiedenen Lehrplänen der Länder deutlich. So fordern die niedersächsischen Rahmenrichtlinien (Kultusministerium Niedersachsen, 1991) einen Zusammenhang zwischen dem Graphen der Ausgangsfunktion und dem Graphen der Ableitungsfunktion herzustellen. Der hessische Lehrplan (Hessisches Kultusministerium, 2002) fordert eine Verknüpfung der geometrischen und der algebraischen Sichtweisen, sowie die Berücksichtigung der infinitesimalen Sichtweise und die Bestimmung der Ableitung durch „algebraische Vereinfachung des Quotienten“ (Hessisches Kultusministerium, 2002). Aber nicht nur auf nationaler Ebene sondern auch mit internationalen Vorgaben bestehen Gemeinsamkeiten. Beispielsweise formulieren die NCTM-Standards (National Council of Teachers of Mathematics) in den USA die Erwartung an die Lernenden, dass sie fähig sind Änderungen zu approximieren und Änderungsraten aus graphischen und numerischen Daten zu entnehmen und zu interpretieren (NCTM, 2000). Es geht also sowohl um die Kenntnis (verschiedener) rechnerischer Verfahren als auch darum unterschiedliche Deutungen zu kennen und zu verstehen (siehe Abschnitt 4.2.1).

4.3 Forschungsergebnisse der Mathematikdidaktik zum Ableitungsbegriff

Der Begriff der Ableitung findet sich bis heute vielfach als Gegenstand mathematikdidaktischer Forschung. Häufig geht es dabei um einzelne Aspekte, wie etwa um das graphische Verständnis des Ableitungsbegriffs (Asiala et al., 1997) oder den Prozess der Bildung des Grenzwerts des Differenzenquotienten (Hähkiöniemi, 2005). Weiter ist die Förderung eines besseren oder leichteren Verständnisses des Ableitungsbegriffs unter Einsatz neuer Medien und Methoden ein großes Forschungsthema, z.B. mittels Werkzeugen zur dynamischen Visualisierung (Serhan, 2006). Ausführlichere Analysen stellen Artigue (1991) und insbesondere Malle (1999, 2003) dar, auf die aber in den Abschnitten 4.3.1 und 4.3.2 noch Bezug genommen wird.

4.3.1 Empirische Befunde zum Ableitungsbegriff

In diesem Abschnitt werden empirische Ergebnisse dargestellt, die sich dem konzeptuellen und prozeduralen Verständnis des Ableitungsbegriffs zuwenden oder auch graphischen und symbolischen Aspekten. Orhun (2005) führte im Schuljahr 2000/2001 mit 125 Elftklässlern einer türkischen, weiterführenden Schule eine Studie durch. Sie setzte dazu einen Test mit 18 offenen Items ein, die sich alle mit den Begriffen Funktion, Grenzwert und Ableitung befassten. In ihrer Studie, die auf die Untersuchung von Fähigkeitsdifferenzen (für jede der definierten Stufen der Begriffsaneignung, des Verständnisses und der Anwendung) zwischen den Geschlechtern abzielte, fand Orhun (2005) heraus, dass prozessbezogene Fragen, z.B. zur Bestimmung eines Grenzwerts, von allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern insgesamt eher richtig gelöst wurden als Fragen, die nach Erklärungen oder Begründungen verlangten. Orhun (2005) schließt daraus, dass die Lernenden sich leichter tun die algebraischen Operationen zur Bestimmung von Ableitungen zu lernen als Bedeutungen zu erfassen. Dies stimmt mit den Erkenntnissen von Artigue (1991) überein, die eigene Arbeiten anführt, aber insbesondere die Ergebnisse einer Studie von Orton herausstellt, der in 110 Einzelinterviews die Kenntnisse von College-Schülern (16 – 22 Jahre) im Bereich der Analysis untersucht hat. Fehler werden dabei eingeteilt in „structural errors“ (Fehler in den Relationen) „executive errors“ (Fehler in den Formelmanipulationen) und „arbitrary errors“ (alle übrigen Fehler) (Orton, 1983).

Artigue (1991) stellte überdies große Mängel im Umgang mit graphischen Repräsentationen und Verfahren fest: Steigungen oder Änderungsraten wurden beispielsweise besser berechnet als aus Graphen abgelesen, durchschnittliche

und momentane Steigungen wurden bei der Arbeit mit dem Graphen eher einmal verwechselt als dies im Zusammenhang mit anderen Repräsentationsformen geschah.

Symbolen wurden in derselben Studie seitens der Teilnehmenden nur minimale Bedeutungen zugeschrieben, was den Nutzen der Symbole für sie einschränkte. Schwierigkeiten mit Symbolen und formalen Aspekten zeigten sich in Orhuns Studie insbesondere mit dem Grenzwert (Orhun, 2005). Ebenfalls zum Grenzprozess untersuchte Hähkiöniemi (2005) Vorstellungen von vier Studenten in aufgabenbasierten Interviews. Alle Teilnehmenden zeigten ein gewisses Verständnis des Grenzprozesses. Um dieses genauer zu beschreiben, nutzte Hähkiöniemi (2005) ein Modell von Cottrill und Kollegen (1996), welches drei Formen mathematischen Wissens (action, process, object) unterscheidet. Dabei wird unter „action“ eine Veränderung von Objekten verstanden, die als Reaktion auf einen Reiz entsteht und von der ausführenden Person als gänzlich extern initiiert und kontrolliert wahrgenommen wird, z.B. das schrittweise Anwenden eines Algorithmus (Asiala et al., 1997). Demgegenüber liegt beim „process“ eine bewusste Handlung vor, über die die Person Kontrolle hat, die sie reflektieren und beschreiben kann. Schließlich ist das „object“ das Ergebnis der „encapsulation of a process“ (Cottrill et al., 1996, S. 171). Das bedeutet, dass vom Prozess, der in seiner Gesamtheit wahrgenommen wird, abstrahiert wird und eigene Transformationen daran durchgeführt und entwickelt werden können (Cottrill et al., 1996).

Hähkiöniemi (2005) unterschied das Verständnis, welches die Teilnehmer seiner Studie zum Grenzprozess zeigten nach dem action level und dem process level. Das konzeptuelle Wissen der Teilnehmerinnen und Teilnehmer war teils sehr niedrig; die Begriffe „durchschnittliche Änderungsrate“ und „Grenzwert des Differenzenquotienten“ waren in einem Fall völlig unverbunden geblieben.

Wiederum verschiedene Vorstellungen und Deutungen der Ableitung wurden in den Untersuchungen von Serhan (2006) betrachtet. Ihre Forschung hatte zum Ziel den Einfluss eines Graphiktaschenrechners auf das Verständnis des Begriffs der Ableitung in einem Punkt zu untersuchen. Dazu beantworteten 24 Studierende, die während der Intervention mit dem grafikfähigen Taschenrechner arbeiten sollten zum Zwecke einer besseren Integration symbolischer, graphischer und numerischer Repräsentationen, und 47 Studierende, die parallel dazu traditionell unterrichtet werden sollten, einen Vor- und einen Nachtest aus je 11 Items. Im Anschluss führte Serhan (2006) mit elf Teilnehmern aus der schriftlichen Studie zusätzlich ein Interview durch. Sie stellte fest, dass bei allen Teilnehmern die Vorstellung der Ableitung als Steigung dominierte. Allerdings wurde die Änderungsrate in der Experimentalgruppe mit dem grafikfähigen Taschenrechner häufiger genannt als in der Kontrollgruppe (Serhan, 2006).

Schwierigkeiten geometrische Bezüge herzustellen zeigten die Teilnehmer in der Studie von Orhun (2005). Nach der geometrischen Deutung eines konkreten Wertes für die Ableitung gefragt, gaben in der Studie nur 9% der weiblichen und 11% der männlichen Teilnehmer die richtige Antwort (Orhun, 2005). Neben einer Unterrepräsentation graphischer Aspekte und einer zu geringen Flexibilität in Bezug auf die Interpretation des Begriffs in Anwendungskontexten, zeigt das Bild, das sich Lernende vom Ableitungsbegriff machen, einige Mängel, die eher auf den unvollständigen oder falschen Aufbau anderer Begriffe zurückzuführen sind, wie in Abschnitt 4.3.2 noch ausgeführt werden wird. Zu diesen Begriffen gehören etwa der Funktions- und der Grenzwertbegriff. Mit anderen Worten, das Vorwissen ist in einigen Fällen unzureichend. Auch zu ebendiesen Begriffen des Vorwissens gibt es einige Untersuchungen, die in der folgenden Passage vorgestellt werden.

4.3.2 Empirische Befunde zu den Lernvoraussetzungen

Beginnend bei dem zentralen Begriff der Funktion wird im folgenden der Forschungsstand zur Qualität des Begriffswissens Lernender für die direkten Nachbarbegriffe des Ableitungsbegriffs, nämlich die Begriffe der Funktion, des Differenzenquotienten und des Grenzwerts, wiedergegeben. Dabei sind die Studien, die bereits zum Funktionsbegriff durchgeführt wurden, derart zahlreich, dass nur die bedeutsamsten Punkte bzw. im Zusammenhang mit dem Ableitungsbegriff relevanten Aspekte vorgestellt werden sollen. So machen etwa Asiala und Kollegen (1997) das unzureichende Verständnis des Funktionsbegriffes seitens der Lernenden dafür verantwortlich, dass bestimmte Zusammenhänge rund um den Ableitungsbegriff nicht verstanden werden. Worin die Mängel im Verständnis des Funktionsbegriffs genau bestehen, führen Studien aus, die diesen Begriff explizit mituntersuchen. So zeigten auch die Teilnehmerinnen und Teilnehmer in der schon in Abschnitt 4.3.1 zitierten Studie von Orhun (2005) ebenfalls ein lückenhaftes Verständnis des Funktionsbegriffs. Defizite traten dabei insbesondere in Bezug auf den Umgang mit graphischen Repräsentationen auf. Ebenso beschreibt es Eisenberg (1991), der als weitere Ursache die oftmals kontraintuitive und komplexe Schreibweise anführt. Dagegen liegen für Sajka (2003), die in einer Fallstudie mit einem Sekundarschüler ähnliche Beobachtungen machte, die Gründe für die Schwierigkeiten mit dem Verstehen im Begriff selbst begründet. Ein Beispiel ist etwa die weit verbreitete Unterscheidung von Objekt- und Prozessaspekten des Funktionsbegriffs, die für Schüler aber verwirrend und schwierig sein kann. Auf der Grundlage etwas anderen Vokabulars hat Vollrath drei grundlegende Sachverhalte zum funktionalen Denken herausgearbeitet, nämlich den „Zuordnungscharakter“, das „Änderungsverhalten“ und die „Sicht als Ganzes“ (Vollrath, 1999, S. 127). Er sieht ein Problem in der

eingeschränkten Sichtweise des Funktionsbegriffs, wie sie sich beispielsweise in der Annahme ausdrückt, dass eine Funktion durch eine einzelne Gleichung darstellbar sein muss (vgl. Abschnitt 2.3.1 zum eingegengten Begriffsverständnis). Sajka (2003) vertritt dazu die These, dass dies durch den Unterricht geschaffene Hindernisse sind, die dem Verständnis des Funktionsbegriffs entgegenstehen, und führt die eingeschränkte Auswahl der Aufgaben als Verursacher an und den sehr begrenzten Bereich, in dem die gelernten Symbole im Unterricht Anwendung finden.

Neben dem als grundlegend zu betrachtenden Funktionsbegriff kann der „Differenzenquotient“ als unmittelbare Voraussetzung des Ableitungsbegriffs angesehen werden. Zu diesem Begriff hat Malle (2003) Schülervorstellungen, insbesondere auch Fehlvorstellungen zusammengetragen. Er stellt dabei einen generellen Mangel an Kenntnis der Bedeutungen fest. Viele Schülerinnen und Schüler können den Begriff „Differenzenquotient“ nicht füllen oder können beispielsweise ein negatives Vorzeichen nicht adäquat deuten. Der Differenzialquotient scheint nach Malles Einschätzung im Unterricht für weitaus wichtiger gehalten zu werden als der Differenzenquotient, weswegen letzterem nur ein Minimum an Unterrichtszeit zugestanden wird. Das Problem dabei sei allerdings, dass die Grundvorstellungen, wie sie für das Verständnis des Differenzenquotienten erforderlich sind, zum Verständnis des Differenzialquotienten beitragen, indem sie auf diesen übertragen werden (Malle, 2003).

Die begriffliche Entwicklung des Differenzialquotienten aus dem Differenzenquotienten erfordert schließlich den Begriff des Grenzwerts. Dieser Begriff gilt allgemein als schwierig. Inhaltlich besteht die Schwierigkeit vor allem darin, dass der Grenzwertbegriff die erste Begegnung der Lernenden mit einer nicht-endlichen Berechnung darstellt, die aber doch zu einem eindeutigen Ergebnis führt (Cottrill et al., 1996). Die Autoren sehen das Hauptproblem allerdings nicht in der Dynamik des Begriffs sondern im Übergang zu einem formalen Verständnis⁶.

In einer qualitativen Studie zum Grenzwertbegriff hat vom Hofe (1998) festgestellt, dass Problembereiche, die sich in den aufgezeichneten Gruppenarbeitsphasen zeigten, eher übergeordneter Natur waren und nicht speziell nur mit dem Grenzwertbegriff verknüpft sind. Sie betreffen die Beziehungen zwischen graphischen und rechnerischen sowie dynamischen und statischen Aspekten oder auch die Beziehung zwischen intuitiven Vorstellungen und präzisen Begriffen. So beschreibt vom Hofe (1998) etwa, dass eine Schülerin mit einem Computerprogramm Differenzenquotienten unter Variation des Nenners berechnet und dabei schließlich 0 einsetzt. Sie erwartet, dass der Computer „zwar kein nu-

⁶Zur Erläuterung: Hier wird auf „formales Verständnis“ geschlossen, wenn Ergebnisse aufgrund von formalen Regeln gewonnen werden.

merisches Ergebnis berechnen aber einen Graphen erzeugen würde“ (vgl. vom Hofe, 1998, S. 283). Dieses Beispiel dient vom Hofe (1998) als Beleg dafür, dass rechnerische und graphische Aspekte vielfach nicht miteinander verbunden werden. Im Sinne der in Abschnitt 2.3 beschriebenen Fehlertypen kann auch von einer Inkonsistenz zwischen der rechnerischen und der graphischen Repräsentation gesprochen werden. Ähnlich kann der Objekt-Prozess-Konflikt als ein Beispiel angesehen werden, in denen die klaren Begriffsabgrenzungen Schwierigkeiten bereiten können (siehe die Beschreibung dieser Problematik in Abschnitt 2.3 nach Vollrath (1999)): „So kann etwa der Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen eine irrationale Zahl sein - und charakteristisch für eine Tangente, die sich als Grenzlage einer Sekantenfolge darstellt, ist gerade der Verlust der Sekanteneigenschaft“ (vgl. vom Hofe, 1998, S. 270).

Derartige übergeordnete Probleme sind also gerade deshalb von Bedeutung, weil sie sich nicht nur auf das Verständnis einzelner Begriffe begrenzen lassen. Beispielsweise treffen die eben genannten Aspekte auf den schon betrachteten Funktionsbegriff ebenso zu. Insofern diese Probleme mit dem Funktionsbegriff bestehen und nicht zuvor beseitigt wurden, betreffen sie in der Folge auch den Aufbau des Ableitungsbegriffs.

4.4 Schlussfolgerungen und Erklärungsmodelle

Zusammenfassend lässt sich aus Abschnitt 4.3 bereits ableiten, dass das prozedurale Wissen zur Ableitung, das die Teilnehmer zur Ableitung in den verschiedenen Studien zeigten insgesamt eher zufrieden stellend war als das konzeptuelle Wissen, z.B. zur Deutung der Ableitung (siehe dazu Abschnitt 4.2). Eine stärkere Betonung graphischer und anderer Nonstandard-Aspekte scheint daher erforderlich um diese Defizite auszugleichen. In welcher Form dies geschehen kann, ist bisher nur ausschnittartig und jeweils im Zusammenhang mit einer neuen Aufgabenkultur oder mit Neuen Medien erforscht. Weiterhin wird ein Verständnis des Funktionsbegriffs sowie weiterer Begriffe des Vorwissens (siehe Abschnitt 4.2.2 und Abschnitt 4.3.2) gefordert. Zum Funktionsbegriff hat Vollrath ein Modell verschiedener Verstehensebenen entwickelt (siehe Abschnitt 3.2.4 und dort insbesondere Tabelle 3.2): Der Begriff wird (1) als Phänomen, (2) als Träger von Eigenschaften, (3) als Teil eines Begriffsnetzes und (4) als Objekt zum Operieren kennengelernt (Vollrath, 1999, S. 137ff).

4.4.1 Das Modell von Asiala und Kollegen

Für den Bereich des graphischen Verständnisses schlüsseln Asiala und Kollegen (1997) auf, welches Wissen und welche Fähigkeiten Voraussetzung anderer

Fähigkeiten sind. Basierend auf diesem genetischen Modell, welches den Wissensaufbau in einzelne Phasen zerlegt, haben sie einen Kurs entwickelt und schließlich eine Interview-Studie durchgeführt. Teilgenommen haben 41 Studierende der Ingenieurs- und Naturwissenschaften bzw. der Mathematik, die bereits Analysiskurse besucht hatten. Ziel war es dabei das Abschneiden bei einer Aufgabe als Prädiktor für den Löseerfolg der nachfolgenden Aufgabe zu verwenden und die Prädiktorqualität festzustellen um so theoretische Annahmen zu prüfen. Der Theorie nach erfordert die Lösung einer späteren Aufgabe neben neuen Aspekten die Aktivierung des Wissens, welches bereits zur Lösung der vorangegangenen Aufgabe notwendig war. Zur Auswertung der Studie wurden die Befragten in drei Gruppen eingeteilt, wobei das Kriterium dieser Klassifizierung das im Interview gezeigte Verständnis des Zusammenhangs zwischen der Steigung der Tangente und der Ableitung in einem Punkt war. Die erste Gruppe zeigte ein gutes Verständnis, die zweite zeigte ein Verständnis der wesentlichen Ideen, wenn auch „prompts“ seitens des Interviewers nötig waren um die Lösung zu erreichen, und schließlich die dritte Gruppe, die ein kaum vorhandenes, eventuell Fehlkonzepte umfassendes Verständnis aufwies (vgl. Asiala et al., 1997, S. 421). Mit der Aufgabe, den Graphen der Ausgangsfunktion nach Informationen über die Ableitung zu zeichnen, wurde die obige Einteilung der Teilnehmerinnen und Teilnehmer überprüft. Die Klassifikation, wie sie zuvor vorgenommen wurde, bestätigte sich durch die erzielten Ergebnisse.

Auf der Basis der Ergebnisse dieser Studie haben Asiala und Kollegen (1997) dann ihr Modell angepasst und somit leicht verändert. Es ist ein hierarchisches Modell des Wissensaufbaus und umfasst

- das Vorwissen (Verständnis des Koordinatensystems, der Darstellung des Punktes in Form der Angabe seiner Koordinaten, einer Funktion inklusive der Geradensteigung),
- den Aufbau des Begriffs der Ableitung,
- die graphische Interpretation der Ableitung (in einem Punkt und als Funktion) und
- die Anwendung des Ableitungsbegriffs (um den Graphen der Funktion zu erhalten).

Das Vorwissen stellt im Modell den Ausgangspunkt dar, indem es die Mindestanforderungen für einen erfolgreichen Erwerb des Ableitungsbegriffs nennt. Der Aufbau des Ableitungsbegriffs verläuft dabei parallel über mindestens zwei Pfade, einen graphischen und einen analytischen Pfad (Asiala et al., 1997).

Der graphische Zugang sieht dabei zunächst das Einzeichnen von Sekanten zur Bestimmung von Steigungen vor, wohingegen der analytische im Berechnen von Differenzenquotienten zwischen zwei Punkten besteht. Dann wird der Prozess des „Aufeinanderzuwanderns“ der Punkte bzw. das „Verkleinern“ der Differenzen des Differenzenquotienten behandelt. Dieser Prozess führt im dritten Schritt zum Objekt, zur Tangente als Grenzlage der Sekanten bzw. für den analytischen Pfad zur lokalen Änderungsrate. Die Steigung der Tangente wird mit der Steigung des Funktionsgraphen in diesem Punkt und der lokalen Änderungsrate an dieser Stelle identifiziert, und es kommt an vierter Stelle zur Verbindung des graphischen mit dem analytischen Pfad um letztlich die Definition der Ableitung zu erhalten.

4.4.2 Die Grundvorstellungen nach Malle

Im Gegensatz zu Asiala und Kollegen (1997) bildet Malle (1999) mit seinem Konzept der **Grundvorstellungen** keine Hierarchie der zu entwickelnden Komponenten des Ableitungsbegriffs sondern eher ein umfassendes Vorstellungs- und Fähigkeitsnetz ab. Zu den Grundvorstellungen zählen beispielsweise die Auffassungen des Differenzenquotienten als Verhältnis, als mittlere Änderung pro Einheit oder als (Steigungs-)Faktor. Es werden jeweils Kontrollfragen angegeben, die der Prüfung dienen, ob eine Person über die jeweils angestrebte Grundvorstellung verfügt oder nicht. Weiterhin werden **Grundfähigkeiten** definiert, wie etwa „Die Schüler sollen für einfache Funktionen den Differenzialquotienten (die Änderungsrate) $f'(x)$ als Grenzwert des Differenzenquotienten (der mittleren Änderungsrate) ermitteln können“ (Malle, 1999, S. 4). Die Grundvorstellungen sind tendenziell eher dem konzeptuellen, die Grundfähigkeiten eher dem prozeduralen Wissen zuzuordnen. Jedoch stellen die Grundfähigkeiten oft auch Mischformen dar, wenn es beispielsweise um das Herstellen von Zusammenhängen oder um Transferleistungen geht. Einige der Grundfähigkeiten tragen den Zusatz „Anwenden“, einige „Grundwissen“. Ersteres bezieht sich dabei auf die Anwendung und Deutung von Begriffen in bestimmten Kontexten, also auf Wissenstransfer, z.B. „Die Schüler sollen den Differenzialquotienten (die Änderungsrate) in möglichst vielen Anwendungssituationen deuten können“ (Malle, 1999, S. 4). Zum Grundwissen gehören dagegen Fähigkeiten, die den klassischen Bereich des Themas betreffen, wie etwa „Die Schüler sollen insbesondere die mittlere Geschwindigkeit als mittlere Änderungsrate einer Zeit-Ort-Funktion interpretieren können“, bzw. die sich speziell auf das Kennen und Anwenden bestimmter Schreibweisen beziehen (Malle, 1999, S. 3).

Kapitel 5

Forschungshypothesen und Methoden der Untersuchung

*Am Anfang unseres Wissens stehen also immer nur „Conjectures“,
Mutmaßungen, Modelle, Hypothesen, die der Prüfung ausgesetzt sind.*

Hans Küng:
Der Anfang aller Dinge.

Zu Beginn dieses Kapitels werden das Forschungsfeld präzisiert und die Forschungshypothesen herausgearbeitet. Eng daran angebunden ist die Frage nach dem methodischen Vorgehen. Daher wird den beiden genannten Punkten dieses Kapitel gemeinsam gewidmet. Im Vorgriff auf die Ausführungen zum Forschungsgegenstand sei bereits hier erwähnt, dass das Augenmerk auf dem konzeptuellen Wissen von Schülerinnen und Schülern im Bereich der Differenzialrechnung liegt. Zum konzeptuellen Wissen zählen zu einem wesentlichen Teil individuelle Ideen und Vorstellungen (vgl. die Abschnitte 3.1.1 und 4.2), denen die Kategorien „richtig“ und „falsch“ kaum gerecht werden. Entsprechend werden zur Bewertung andere, detailliertere Kategorien benötigt. Als Konsequenz stellt sich die Frage, welche Methode dies leistet und dieser Zielsetzung genügen kann. Verschiedene Forschungsmethoden werden daher hinsichtlich ihres Einsatzbereichs, ihrer Vor- und ihrer Nachteile dargestellt. Somit lässt sich schließlich begründen, welche methodischen Ansätze sinnvoll und praktikabel sind. Eine konkrete Beschreibung der gewählten Methoden und der Durchführung der Untersuchung folgt dann im nächsten Kapitel.

5.1 Fragestellungen zum Begriffsverständnis

In den voranstehenden Kapiteln werden verschiedene Zugänge zur Differenzialrechnung (siehe Abschnitt 4.1) und Anschauungen des Ableitungsbegriffs

(siehe Abschnitt 4.2) behandelt. Für ein tiefes Verständnis des Ableitungsbegriffs sind vermutlich Aspekte, wie z.B. graphische Anschauungen, besonders bedeutsam; so lassen es zumindest, die im vorangegangenen Kapitel zitierten Studien annehmen (siehe Abschnitte 4.3.1 und 4.3.2). Allerdings beziehen sich die dort dargestellten Studien oft auf singuläre Aspekte oder gänzlich andere Fragestellungen, z.B. zu Unterschieden zwischen den Geschlechtern, und lassen deshalb kaum verlässliche, allgemeinere Aussagen zu. Die Forschungsaufgabe besteht daher darin den Bedingungsrahmen zunächst gegenüber vorangegangenen Studien zu erweitern und zu untersuchen, welche Faktoren für einen kompetenten Umgang mit dem Ableitungsbegriff und eng verbundenen weiteren Begriffen ausschlaggebend sind. Dazu soll versucht werden, die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler in dieser Studie zu kategorisieren, um so festzustellen, welche Kenntnisse und Fähigkeiten einen erfolgreichen von einem weniger erfolgreichen Befragten unterscheiden.

5.1.1 Eingrenzung des Forschungsfeldes

Bereits in Abschnitt 2.2.1 wird die Bedeutung des Vorwissens und insbesondere bereits vorhandener Vorstellungen für den weiteren Ausbau von Begriffen betont. Für den Begriff der Ableitung bilden somit sicherlich die Grundvorstellungen und -techniken des Differenzierens eine wichtige Basis für ein gutes Begriffsverständnis. Deshalb wird die Ausprägung ebendieser Vorstellungen und Fähigkeiten der Lernenden überprüft, womit gleichzeitig der Anschluss an schon vorhandene Studien hergestellt wird (zu den Grundvorstellungen vgl. Malle, 2003, zum Tangentenbegriff vgl. Biza und Zachariades, 2005). Für einen tragfähigen, d.h. flexibel nutzbaren und somit qualitativ wertvollen Ableitungsbegriff ist dies aber den Ausführungen in Abschnitt 3.1.2 nach nicht ausreichend. Im genannten Abschnitt wird ein Ansatz vorgestellt, der Wissen in Komponenten zerlegt, die zur erfolgreichen Bewältigung von Problemstellungen erforderlich sind. Dabei sind für die Anwendung von Wissen insbesondere auch situations- oder kontextspezifische Variablen relevant, die hinzuzuziehen sind (siehe Abschnitt 3.1.2). Zum anderen wirkt der Kontext aber auch unterstützend, indem er in die aktuelle Situation wichtige Informationen aus dem Begriffsnetz „einspeist“, wie in Abschnitt 1.3.3 über die hierarchische Struktur des Gedächtnisses beschrieben. Zusammenfassend bedeutet das, um das Wissen erfolgreich anwenden zu können, müssen die Lernenden in der Lage sein ihr Wissen der jeweiligen Situation anzupassen, im aktuellen Kontext abzurufen und mit anderen Wissensseinheiten zu kombinieren. So ist die Deutung der Ableitung als Änderungsrate sicherlich umfassender als die Deutung der Ableitung als Steigung, vgl. Abschnitt 4.1.3. Im Idealfall verfügt eine Person natürlich über beide Vorstellungen, die zudem stark miteinander vernetzt sind

(siehe Abschnitt 1.3.3), etwa zur Bestimmung der Geschwindigkeit aus graphischem Material, in dem Zeit- und Ortsdaten angegeben sind (siehe Abbildung 5.1). Diese Aufgabe erfordert vom Bearbeiter die Deutung der Ableitung als Steigung zu kennen und sie überdies mit der Interpretation der Geschwindigkeit als spezieller Änderungsrate zu verbinden. In diesem Beispiel sind es also die Relationen zwischen den Vorstellungen, die eine Rolle spielen – neben dem Vorwissen, etwa zum Funktionsbegriff und Erfahrungen im Umgang mit verschiedenen Repräsentationsformen.

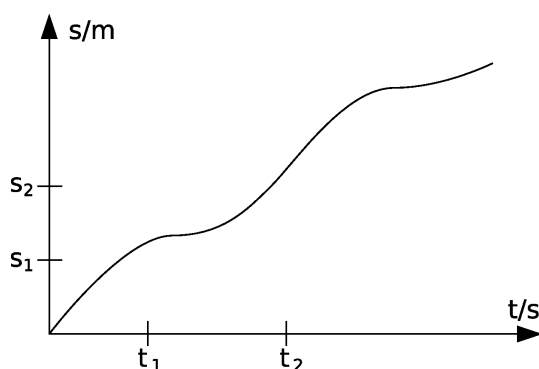


Abbildung 5.1: Beispiel: Verbindung der Anschauungen der Ableitung als Steigung und der Geschwindigkeit als spezieller Änderungsrate

Allerdings wird die Qualität des Wissens nicht allein durch möglichst abstrakte und umfassende Wissensstrukturen (siehe Abschnitt 3.2.1) innerhalb des konzeptuellen Wissens bestimmt. Vielmehr ist es ebenso wichtig Zusammenhänge zwischen dem konzeptuellen und dem prozeduralen Wissen herstellen zu können um Aufgaben schließlich erfolgreich zu bewältigen (siehe Abschnitt 3.2.3 zum „procept“-Konzept). So setzt etwa das graphische Differenzieren das Wissen voraus, wo und wie sich die Ableitung im Graphen finden lässt, was die Vorstellung der Ableitung als Steigung erfordert. Die eigentliche Bestimmung der Ableitung gelingt dann auf der Grundlage des Vorwissens (zu Funktionen, Steigungsdreiecken, etc.).

Damit beschreiben die oben genannten Kriterien, Allgemeinheit, Anwendbarkeit und Vernetztheit Qualitätsmaße für begriffliches Wissen. Einen Ableitungsbegriff hoher Qualität zeichnen speziell die Relationen zwischen Wissensseinheiten aus (siehe Abschnitt 3.2), sodass gerade diese Relationen einen lohnenswerten Untersuchungsgegenstand darstellen. Interessant dabei ist insbesondere die Suche nach längeren Kausalketten, die ein gutes Verständnis eines Begriffs in mehreren Schritten auf jeweils zugrunde liegende Vor-Begriffe zurückführen. Solche Kausalketten könnten beispielsweise sogar bis zum Funk-

tionsbegriff zurückreichen und dort die Ursache für einen Erfolg oder Misserfolg aufdecken (vgl. Abschnitt 4.3.2). Für den graphischen Bereich gibt es bereits Arbeiten von Asiala und Kollegen (1997), die mehrstufige Kausalzusammenhänge beschreiben (siehe die Ausführungen in 4.4). Unklar ist hier jedoch, ob eine Person eine klar hierarchische Anordnung der Voraussetzungen in ihrer Wissensstruktur aufweisen muss, um höheren Anforderungen gerecht zu werden. Womöglich gibt es gleichwertige, alternative oder kompensatorisch wirkende Kausalketten oder auch nicht-hierarchische Wissensnetze.

Als weiterer, für die Mathematik typischer Gesichtspunkt spielt die Formelsprache mit wachsendem Anforderungsniveau eine zusehends größere Rolle. Die unterschiedlichen Formeln und Symbole variieren dabei in Bezug auf ihren Abstraktionsgrad und ihren Bedeutungsgehalt. Folgt man der „procept“-Theorie von Gray und Tall (1992), so lässt sich argumentieren, dass der Bedeutungsgehalt von Symbolen mit den Anforderungen an die Flexibilität von Rechenverfahren steigt. Während die Symbole zunächst Rechnungen, d.h. Prozeduren unterstützen und es ermöglichen sie ökonomisch aufzuschreiben, stehen sie auf elaborierterem Niveau sowohl für Prozesse als auch für bestimmte Deutungen. Sie vermögen daher ebenfalls Gegenstände des konzeptuellen Wissens komprimierter darzustellen und zu exaktifizieren. Formeln und Symbole zählen damit klar zum begrifflichen Wissen und werden entsprechend in die Fragestellung der hier angestrebten Untersuchung begrifflichen Wissens einbezogen.

Andere Aspekte und Wissensformen wie etwa Strategiewissen werden zugunsten einer genauen Analyse der zuvor genannten Aspekte ausgeklammert. Ebenso werden komplexe Problemlöseprozesse aus der Untersuchung ausgeschlossen. Sie können nicht mehr zum Untersuchungsgegenstand zählen, da beim Problemlösen zu viele Kontextvariablen neben dem Begriffsverständnis im engeren Sinne eine Rolle spielen.

5.1.2 Forschungshypothesen

Es ergeben sich drei Bereiche, in die sich die Forschungsaufgabe der Untersuchung untergliedern lässt. Sie werden jeweils in einem kurzen Text erläutert und in den nachfolgenden Forschungshypothesen konkretisiert:

1. Prozedurales und konzeptuelles Wissen

Zunächst stellt sich die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den prozeduralen Fähigkeiten und dem konzeptuellen Wissen der zu befragenden Personen. Die Annahme, dass es einen Vorteil für den Bereich der Prozeduren gibt, wird (wie im Theorieteil, siehe Abschnitt 4.3.1 vorgestellt) bereits durch einige Studien, insbesondere die von Orhun (2005), gestützt. Als relevant wird die Förderung des konzeptuellen Wissens, und

da insbesondere der Anschauungen, deshalb angesehen, weil davon ausgegangen werden kann, dass sie dem Aufbau von prozeduralem Wissen zuträglich sind (siehe Abschnitt 3.1.3). Dabei spielen gewisse Anschauungen vermutlich eine wichtigere Rolle als andere. Ob Entwicklungen im Mathematikunterricht, weg vom algorithmischen und hin zum bedeutungsvollen Lernen (nach de Jong & Ferguson-Hessler (1996) also von der Qualität des oberflächlichen zum tiefen Wissen, siehe Abschnitt 3.2.1), hier zu veränderten Ergebnissen führen, oder ob diese Ergebnisse für die teilnehmende Stichprobe der deutschen Schüler repliziert werden, ist nicht unmittelbar absehbar.

Zum konzeptuellen Wissen selbst stellen sich weitere Fragen, wie etwa die nach dem Abstraktionsgrad, den die Schülerinnen und Schüler in ihren Anschauungen erreichen. Erkennen sie beispielsweise, dass der Begriff der Änderungsrate ein Prinzip darstellt, welches den anderen, spezielleren Vorstellungen zugrunde liegt? Diese Frage scheint deshalb bedeutsam, weil die Vorstellung der Ableitung als Änderungsrate allgemeiner ist und damit auf einen größeren Anwendungsbereich zugreift (zur Änderungsrate siehe Abschnitt 4.1.3) und zudem eine Verbindung zwischen (fast) allen anderen Anschauungen liefert. Möglicherweise kann die Vorstellung der Ableitung als Änderungsrate den Lernenden helfen weitere angemessene Relationen zwischen verschiedenen Anschauungen des Ableitungsbegriffs aufzubauen.

- 1.1 Werden nur Standardprozeduren im Sinne algebraischer Manipulationen verlangt, so sollte dies Lernenden leichter fallen – da die Anforderung nach Abschnitt 3.2.1 nach einer geringeren Wissensqualität verlangt –, als wenn eine Aufgabe zu bearbeiten ist, in deren Lösung ein wesentlicher Anteil konzeptuellen Wissens eingeht. So sollte den Lernenden beispielsweise das graphische Differenzieren schwerer als das symbolische fallen.
- 1.2 Umfassendere, relativ universelle Auffassungen, wie z.B. die Vorstellung der Ableitung als Änderungsrate, stellen ein höheres Anforderungsniveau dar, welches nicht von allen Lernenden erwartet werden kann, da zum Verständnis eine bedeutungsvolle (hierarchische) Begriffsstruktur notwendig ist, siehe Abschnitt 3.2.1. Es ist daher anzunehmen, dass das Vorstellungsgefüge der Schülerinnen und Schüler von konkreteren Anschauungen, wie z.B. der Ableitung als Steigung oder als Steigung der Tangente, dominiert wird.
- 1.3 Da der Grenzprozess zentral für den Ableitungsbegriff ist (siehe Abschnitt 4.2.1), hat die Auffassung der Ableitung als Grenzwert für

das Verstehen besondere Bedeutung. Weiterhin stellen die Vorstellungen der Ableitung als Steigung des Graphen, und als Steigung der Tangente in einem Punkt grundlegende Vorstellungen des Ableitungsbegriffs dar (siehe Abschnitte 4.1.1 und 4.1.2). Daher ist insgesamt davon auszugehen, dass die Vorstellung der Ableitung als Steigung und die Betrachtung des Begriffs als Grenzwert zentral für das Verstehen des Ableitungsbegriffs sind. In dem Fall wären die genannten zwei Begriffe dann als Prädiktor für die Gesamtkompetenz der Schülerinnen und Schüler geeignet.

2. Formelsprache und Symbole

Ein nächster Bereich betrifft die Formelsprache. Uneinigkeit besteht bezüglich des Grades der Formalisierung der Mathematik in der Schule. Dahinter steht die Frage, ob eine formale Schreibweise eher als verständnisfördernd oder als verständnishemmend anzusehen ist, wie die Ergebnisse der Studien von Orhun (2005) und Eisenberg (1991) es nahelegen (siehe Abschnitt 4.3.2). Nach Gray und Tall (1992) spielen Symbole erst auf höherer Ebene eine Rolle im Begriffsverständnis, sodass entscheidende Verstehensprozesse bereits zuvor stattgefunden haben müssen (siehe Abschnitt 3.2.3). Insofern ist es also wichtig die Bedingungen zu untersuchen, die einer verständnisfördernden oder zumindest -erhaltenden Nutzung der Formelsprache dienen.

2.1 Es ist anzunehmen, dass die in der Differenzialrechnung üblichen Symbole, z.B. $\lim_{x \rightarrow x_0}$ bzw. $\lim_{h \rightarrow 0}$, und die entsprechenden Schreibweisen für den Differenzenquotienten, dann produktiv genutzt werden können, wenn sie einen hohen Bedeutungsgehalt tragen. Das bedeutet, dass ein souveräner Umgang mit Symbolen und Formelsprache mit einem reichhaltigen Netz von Vorstellungen und Deutungen zum Ableitungsbegriff einhergeht. Können die Schülerinnen und Schüler Symbole und Formelsprache dagegen nicht produktiv nutzen, so sind vermutlich die Vorstellungen zum Ableitungsbegriff entweder unzureichend ausgeprägt oder nicht miteinander vernetzt worden.

2.2 Sind Aufgabenteile sehr formal dargestellt, dann ist zu erwarten, dass die Aufgabe nur für denjenigen lösbar ist, der in der Lage ist Formeln und Symbole zu interpretieren und mit den Prozeduren des Differenzierens zu verknüpfen.

3. Einfluss des Vorwissens

Ein etwas nachgeordneter Punkt bezieht sich auf die Kenntnis, die die Schülerinnen und Schüler von den Begriffen des Vorwissens zur Differenzialrechnung haben. Auch diese sind bereits Gegenstand verschiedener empirischer Studien gewesen (siehe Abschnitt 4.3.2), die im Wesentlichen Defizite festgestellt haben. Dass Schwierigkeiten mit Begriffen des Vorwissens auf die Entwicklung von Begriffen der Differenzialrechnung selbst eine negative Auswirkung haben, ist zu erwarten, zumal das Vorwissen nach dem in Abschnitt 4.4.1 dargestellten Modell überhaupt als Fundament für den erfolgreichen Aufbau des Ableitungsbegriffs bezeichnet werden kann.

- 3.1 Ist das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler, etwa zum Differenzenquotienten oder zur durchschnittlichen Steigung lückenhaft, so ist davon auszugehen, dass Möglichkeiten fehlen um Prozeduren abzurufen bzw. zu rekonstruieren oder auch Ergebnisse zu prüfen. So hilft die Kenntnis des Differenzenquotienten sicherlich beim Aufstellen des Differenzialquotienten und so erlaubt es der Begriff der Durchschnittssteigung die Größenordnung für die momentane Steigung abzuschätzen oder zu überprüfen. Anzunehmen ist, dass Vorwissensbegriffe unterstützend wirken um neue Begriffe und Prozeduren insbesondere an die Vorstellung der Ableitung als Steigung anzubinden.
- 3.2 Schülerinnen und Schülern fehlen häufiger die begrifflichen Abgrenzungen (siehe Abschnitt 2.3.1 bzw. Vollrath, 1999). Es ist anzunehmen, dass es dadurch im Zuge von Begriffserweiterungen oder -differenzierungen zu Verstehens-Konflikten kommt, beispielsweise zwischen dem alten und dem neuen Tangentenbegriff.

Mit dem Ziel schließlich die Qualität des Wissens der befragten Schülerinnen und Schüler genauer zu bestimmen, sollen aus der Untersuchung der genannten Bereiche, „Prozedurales und konzeptuelles Wissen“, „Formelsprache und Symbole“ und „Einfluss des Vorwissens“ Qualitätskriterien gezogen werden. Auf dieser Grundlage werden die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler anschließend in Kategorien eingeteilt um so Bedingungsgefüge zu bestimmen, die erfolgreiche von weniger erfolgreichen Personen abgrenzen. Diese Ergebnisse haben somit eine unmittelbare Relevanz für den Unterricht, da sie aufzeigen können, welche Schwerpunkte zu setzen sind. Die Lernenden lassen sich nach ihren Ergebnissen einteilen, wobei die dabei gebildeten Kategorien auch inhaltlich beschrieben werden können.

Für die Studie stellt sich die Frage, welches Vorgehen bzw. welches Erhebungsinstrument geeignet ist um die dargestellten Forschungshypothesen zu über-

prüfen. Hierzu werden die Vor- und Nachteile der jeweiligen Methode bezogen auf den gewählten Einsatzbereich dargestellt.

5.2 Vorüberlegungen zum methodischen Vorgehen

5.2.1 Schriftliche Leistungstests

Ein Test wird als **Leistungstest** bezeichnet, wenn es sich um leistungsbezogene Merkmale handelt, die mit ihm erhoben werden, und die Antworten bzw. Lösungen somit objektiv auf Richtigkeit geprüft werden können. Als Ergebnis liefert er relative Aussagen über Ausprägungen von Leistungsmerkmalen von Einzelpersonen im Vergleich zur übrigen Stichprobe (Bortz & Döring, 2005). Weiterhin erlauben es diese Tests, das Leistungsniveau einzelner Schüler oder auch von Lerngruppen im Vergleich zu anderen bzw. zum Durchschnitt der Gesamtstichprobe festzustellen. Leistungstests eignen sich daher als Messinstrument, wenn Daten einer größeren Stichprobe finanziell und zeitlich möglichst ökonomisch erhoben werden sollen. Recht leicht lässt sich bei der Datenerhebung die Objektivität durch eine Anleitung sicherstellen, durch die die Testleiter genau über den Rahmen der Untersuchung informiert werden, z.B. bezogen auf den Zeitbedarf, die zulässigen Hilfsmittel oder die von ihnen zu gebenden Instruktionen (vgl. Bortz & Döring, 2005). Auch bei der Auswertung ist Objektivität vergleichsweise leicht zu erzielen, sofern erst einmal ein Beurteilungsmaßstab für die Lösungen vorliegt. Die schriftlichen Lösungen werden anhand dieses Maßstabes durch Rater bewertet. Dabei wird schließlich jeder Test von mindestens zwei Ratern beurteilt, die sich bei Unstimmigkeiten entweder einigen oder das Urteil einer weiteren Person einholen müssen.

Jedoch müssen auch einige Einschränkungen hingenommen werden. So bleibt der Weg, auf dem jemand zur Lösung einer Aufgabe gekommen ist, oft weitgehend unsichtbar. Dies gilt umso mehr für geschlossene Aufgabenformate, die üblicherweise keine Erläuterungen fordern und für deren richtige Beantwortung immer auch eine bestimmte Ratewahrscheinlichkeit besteht. Je nach gewählten Distraktoren können geschlossene Aufgaben zudem gelegentlich auch mit Hilfe von Schätzungen gelöst werden. Schließlich ist auch eine Verfälschung der Ergebnisse, etwa durch Missachten einer vorgegebenen Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben und ähnliches nicht ganz auszuschließen. Zielt die Studie aber eher auf einen Vergleich von Gruppen ab, so wird von der individuellen Leistung abgesehen, und derartige Stör-Einflüsse fallen weniger ins Gewicht, soweit die Testung im Wesentlichen gemäß der Planung stattfinden konnte.

5.2.2 Interviewtechniken

Die qualitative Forschung hat mittlerweile eine ganze Reihe von unterschiedlichen Interviewvarianten hervorgebracht. Zum Teil werden sie nach der Zahl der Befragten und auch der Interviewer unterschieden. Aber auch bei ausschließlicher Betrachtung des Einzelinterviews lassen sich nach Lamnek (2005) verschiedene Varianten unterscheiden. Zu den zugrunde gelegten Kriterien zählen etwa die Offenheit der Interviewführung, die Art der Kommunikation und der Einsatzbereich (Lamnek, 2005).

Häufig werden die Kriterien, die den Fragenkatalog des Interviews betreffen, in der Literatur auch unter dem Stichwort „Standardisierung“ zusammengefasst. Ein **standardisiertes Interview** legt die zu stellenden Fragen, ihre Reihenfolge und ihre Formulierung für alle zu interviewenden Personen verbindlich fest (Schnell et al., 2005). Ein Beispiel, in dem ein stark standardisiertes Interviewverfahren angewendet wird, stellen etwa die telefonischen Befragungen der Meinungsforschungsinstitute dar, bei denen zur Beantwortung oft nur die Wahl zwischen den vorgegebenen Antwortalternativen bleibt. Dem standardisierten Interview wird das **offene Interview** gegenübergestellt, bei dem vor Beginn des Interviews meist nur einige Leitfragen oder auch nur grobe Themenbereiche feststehen. Die interviewte Person kann die Richtung des Interviews in weiten Teilen selbst bestimmen und eigene Schwerpunkte setzen. Ein typisches Beispiel ist hier das **narrative Interview**. Nach Lamnek (2005) wird es völlig offen, mit einer als „erzählend“ charakterisierten Kommunikation gestaltet. Es wird üblicherweise eingesetzt um Hypothesen zu generieren. So ist es geeignet um von Zeitzeugen etwas über ein bestimmtes Ereignis zu erfahren. Demgegenüber ist etwa das **fokussierte Interview** kaum offen: Es folgt in seiner Kommunikation einem Leitfaden und wird eher zur Überprüfung von Hypothesen eingesetzt.

Die Abhängigkeit der Interviewform vom Einsatzgebiet des Interviews ergibt sich als Selbstverständlichkeit. Für den Bereich der Leistungsmessung und einen möglichen Vergleich zwischen einzelnen Personen sind daher nur vom Interviewer stark geführte, weitgehend standardisierte Interviewformen möglich.

Die Nachteile des Interviews liegen zum einen in dem hohen Zeitaufwand, der für die Durchführung der Interviews, die Aufbereitung der Daten und ihre Auswertung notwendig wird. Als Folgerung daraus sind die Stichprobengrößen bei Interviewstudien eher gering im Vergleich zu schriftlich durchgeführten Erhebungen. Zum anderen ist die Erhebungssituation im Fall von Interviews klar störanfälliger als bei einem Test oder einem Fragebogen (vgl. Wottawa & Thierau, 1990). Dem lässt sich nur durch gründliche Vorbereitung entgegen-

wirken, etwa durch die Wahl eines angemessenen, möglichst lärmgeschützten Ortes und eine ausreichende Interviewer-Schulung.

Generell trägt der Interviewer einen wesentlichen Teil der Verantwortung für die Vergleichbarkeit der Interviewsituationen. So wird von ihm verlangt, dass er sich gut auf das jeweilige Interview vorbereitet und bereits Maßnahmen trifft um Störungen von vornherein zu vermeiden oder zu minimieren. Daneben ist das Verhalten des Interviewers in der konkreten Interviewsituation besonders wichtig. „Das ideale Interviewerverhalten wird in der völligen Neutralität gegenüber Thema und Befragtem gesehen“ (Schnell et al., 2005).

Wie bereits zuvor erwähnt, lässt sich einigen Nachteilen durch eine gründliche Vorbereitung und eine sorgfältige Interviewer-Schulung begegnen. Der Nachteil des großen Aufwandes bei vergleichsweise geringer Stichprobe bleibt allerdings bestehen. Jedoch stehen diesem offenkundigen Nachteil einige Vorteile gegenüber. So stellt beispielsweise Lamnek (2005) zwei generelle Vorzüge qualitativer Methoden dar. Zum einen bleibt den Teilnehmern von qualitativen Studien mehr Freiraum ihre eigene Sicht der Wirklichkeit einzubringen und ihren eigenen Interpretationsrahmen durchzusetzen. Zum zweiten können in der qualitativen Forschung viel stärker dynamische, prozessartige Aspekte abgebildet werden (Lamnek, 2005). Der erstgenannte Punkt trifft für den Bereich der Leistungsmessung natürlich nur äußerst eingeschränkt zu. Der zweite ist aber in dem hier betrachteten Kontext umso bedeutsamer. Mit Lamnek (2005) kann hier festgestellt werden, dass die qualitative Methode in Form des Interviews die quantitative ergänzt und so einen holistischen Blick auf das Forschungsfeld erlaubt.

5.2.3 Mapping-Techniken

Mapping-Techniken können als strukturierte, visuell-räumliche Darstellungen von Wissen beschrieben werden (Tergan, 2005). Gelegentlich werden sie auch als Begriffs- oder Wissens-Landkarten bezeichnet, von denen es mittlerweile diverse Subkategorien gibt. Eine verbreitete Form der Darstellung von Begriffen und deren Beziehungen untereinander sind so genannte **Concept Maps**: Dazu werden die Begriffe beispielsweise auf Kärtchen geschrieben, die etwa auf einem großen Papier ausgelegt werden können um dazwischen die Relationen als verbindende, möglicherweise beschriftete, Linien darzustellen. Demgegenüber stellt die **Mind Map** eine Form dar, bei der ein Begriff das herausgehobene Zentrum darstellt, um welches weitere Begriffe gruppiert werden. Weitere Formen netzwerkartiger Wissensdarstellungen, die sich teils auch spezieller Software bedienen, finden sich zahlreich in der Literatur (Mandl & Fischer, 2000; Bonato, 1990).

Allen Mapping-Verfahren ist gemein, dass sie über Möglichkeiten verfügen komplexe Zusammenhänge komprimiert und dennoch übersichtlich zu präsentieren. Dabei kann die Darstellung von Wissensstrukturen nach Jüngst und Strittmatter (1995) drei prinzipiell verschiedene Funktionen haben: Zum einen ist das aus Sicht der Diagnostik die „Repräsentation“ von Wissensstrukturen, zum zweiten die „Vermittlung“ nach didaktischem Verständnis und schließlich im Bereich der Selbstinstruktion der „Erwerb“ von Wissensstrukturen. Die Wahl des speziellen Mapping-Verfahrens hängt natürlich direkt von der Funktion ab, die dieses Verfahren haben soll. Für den Bereich der Forschung ist nur die Repräsentation von Wissen interessant. Dabei wird zunächst angenommen, dass es eine prinzipielle Ähnlichkeit zwischen der Struktur von Concept Maps und der Art der Speicherung von Wissen im menschlichen Gedächtnis gibt (Jüngst & Strittmatter (1995); Hasemann & Mansfield (1995), zur Wissensorganisation im Gedächtnis siehe Abschnitt 1.3.2). Eingesetzt werden Mapping-Techniken in der empirischen Forschung um etwa spezifische Verständnisprobleme aufzudecken oder Entwicklungen von Verstehensprozessen zu begleiten.

Die Bedeutung der Concept Maps wird durch Befunde der Problemlöseforschung zusätzlich hervorgehoben. Laut Plötzner und Kollegen (2000) ist bekannt, dass zur Erklärung von Erfolg und Misserfolg in Anwendungssituationen im Wesentlichen zwei Faktoren eine Rolle spielen: Es sind der „Umfang“ und die „Organisation“ des verfügbaren Wissens, und damit Faktoren, die in Concept Maps gut sichtbar werden. Für Schwierigkeiten oder Fehler werden oft entweder gänzlich fehlende oder schlecht verbundene Wissensstrukturen verantwortlich gemacht (siehe die in Abschnitt 2.3.1 dargestellten Fehlertypen, speziell das träge Wissen).

Oft wird an Mapping-Methoden auch die Erwartung herangetragen, dass sie strukturelles Wissen außerhalb spezifischer Aufgabenkontexte sichtbar machen können. Bei dieser Sichtweise wird davon ausgegangen, dass der Kontext von Aufgaben ein zusätzliches Hindernis für die Befragten darstellen könnte, weswegen er vollständig ausgeblendet wird. In der Konsequenz würde das bedeuten, dass in dem Bemühen strukturelles Wissen durch Aufgabensets zu erfassen immer ein Mekkfehler entsteht, der zwangsläufig zu einer Unterschätzung des Wissens der Befragten führt. Allerdings darf nicht von einem systematischen Fehler ausgegangen werden, der bei allen Befragten in gleichem Maße auftritt.

Ebenso lässt sich umgekehrt argumentieren, dass Mapping-Methoden eine zusätzliche Schwierigkeit darstellen, weil sie kontextfrei nach begrifflichen Verknüpfungen fragen. Hintergrund dieser Argumentation ist die heute gängige Auffassung, dass es keinen allgemeinen sondern maximal einen bereichsspezifischen Wissenstransfer gibt (Edelmann, 2000). Genau so ein Wissenstrans-

fer, im Sinne einer Verallgemeinerung der ursprünglich innerhalb spezieller Kontexte erworbenen Begriffe (Edelmann, 2000), ist aber erforderlich um eine netzartige Darstellung des eigenen Wissens vornehmen zu können.

Zudem merken Jüngst und Strittmatter (1995) und in ähnlicher Weise auch Tergan (2005) an, dass Probleme auftreten können, wenn das „Verfahren seinerseits einer gewissen Vertrautheit bedarf, um adäquat gehandhabt werden zu können“ (Jüngst & Strittmatter, 1995, S. 200). Ohne an dieser Stelle auf die Schwierigkeit einer objektiven Auswertung näher einzugehen, ist die Gefahr von Messungenauigkeiten beim Einsatz von Mapping-Techniken als Forschungsinstrument gegeben.

Allerdings sehen Hasemann und Mansfield (1995) auch das Potenzial dieser Methode, da sie zumindest für ältere Teilnehmerinnen und Teilnehmer im Concept-Mapping einen Weg sehen Einblicke in die von ihnen gebildeten Schemata und deren Entwicklung zu erhalten („to gain insight into the structure of students’ existing schemas and into their development“) (Hasemann & Mansfield, 1995, S. 69). Überhaupt wird davon ausgegangen, dass die Methode für ältere Personen recht gut geeignet ist, während sie etwa bei Grundschulern eher kritisch gesehen wird, da junge Schüler noch sehr stark mit dem Kontext verhaftet sind (Hasemann & Mansfield, 1995) und nicht bewusst auf allgemeine Begriffe zugreifen können.

Mapping-Verfahren bieten also, auch wenn sie immer in bestimmtem Maße mit den zuvor genannten Problemen behaftet sind, eine Möglichkeit die „Sprachlosigkeit“ der Teilnehmenden zu überwinden, indem ihnen gewisse Bezeichnungen⁷ mit dem Mapping-Material zur Verfügung gestellt werden, die ihnen sonst eventuell fehlen würden. Dabei ist es zumindest für die in diesem Kapitel formulierten Fragestellungen ganz unerheblich, ob die Bezeichnungen sonst nicht zum aktiven Vokabular der Befragten gehören oder sie diesen in Interviewsituationen schlicht keine Beachtung schenken würden.

5.3 Schlussfolgerung

Zusammenfassend hat jede Methode ihre eigenen spezifischen Vorzüge und auch Nachteile. So lässt sich die schriftliche Leistungsmessung mit relativ großen Stichproben durchführen und liefert gruppenbezogene Aussagen über das Leistungsniveau auf einem Gebiet. Details zu den Lösungen und vor allen Dingen die Lösungswege selbst lassen sich dagegen nur begrenzt ermitteln.

Interviews hingegen sind prinzipiell geeignet auch die Lösungswege oder allgemeiner Prozesse abzubilden. Einschränkend ist anzumerken, dass letztlich der

⁷Darunter können ebenso mathematische Konventionen oder Formeln gefasst werden.

Teilnehmer selbst entscheidet, inwieweit er seine Gedankengänge offenlegt und ergo damit weitgehend bestimmt, in welchem Maße im Interview Lösungswege sichtbar werden. Dennoch bietet die direkte Kommunikation des Interviews vor allem Vorteile, indem sie allen Beteiligten mehr Freiräume zugesteht. So ermöglichen Interviews das Nachfragen des Forschers⁸ und geben doch auch dem Befragten mehr Spielraum. Damit hat dieser eher die Gelegenheit sein eigenes Vokabular anzubringen und kann zusätzlich seine Aussagen durch besondere Betonungen oder Gesten ergänzen. Vorteilhaft kann dies im hier aufgezeigten Forschungskontext gerade dann sein, wenn es um eigene Ideen und Vorstellungen zu Begriffen geht.

Für die oben genannten Forschungshypothesen aus dem Bereich der Differenzialrechnung stellt das Interview daher eine geeignete Methode dar um etwa die Vorstellungen der Teilnehmerinnen und Teilnehmer zum Ableitungsbegriff und deren Wissen um Zusammenhänge zu anderen Begriffen festzustellen (siehe Hypothesen 1.2 und 1.3 sowie 2.1 in diesem Kapitel). Die große Datenmenge pro Person und die, verglichen mit einem schriftlichen Untersuchungsinstrument, aufwendigere Auswertung, lassen in den meisten Fällen nur die Untersuchung kleinerer Stichproben zu. Als ein Vorteil für die Auswertung zeigt sich jedoch in diesem Fall, in dem das Interview weitgehend standardisiert durchgeführt wird und im Wesentlichen der Leistungsmessung dient, dass die Gefahr anderer Verzerrungseffekte, die in der Literatur genannt werden, z.B. soziale Erwünschtheit (Bortz & Döring, 2005; Schnell et al., 2005), als gering anzusehen ist.

Um ganz klar auf die begrifflichen Zusammenhänge zu fokussieren bietet sich außerdem an von den Teilnehmenden der Untersuchung eine Concept Map aufbauen zu lassen. Potenziell erlauben Mapping-Methoden eine Annäherung an die genannten Faktoren „Umfang“ und „Organisation“ des Wissens, so dass diese Methode im Kontext der Forschungshypothesen 2.1 und 2.2 sinnvoll scheint, um zusätzliche Informationen zu liefern.

Ein schriftlicher Leistungstest lässt sich als Vorstudie nutzen. Er dient dazu das Leistungsniveau der Schülerinnen und Schüler besser einschätzen zu können und das Interview darauf abzustimmen. Zudem kann er im Sinne eines Explorationsinstruments interessante Aspekte aufdecken, die so bis dahin im Design des Interviews noch nicht berücksichtigt worden sind. Dies gilt insbesondere für die offen formulierten Aufgaben.

⁸Der Einfachheit und der besseren Lesbarkeit halber wird hier schlicht das Wort ‚Forscher‘ verwendet. Es ist so zu verstehen, dass es alle interviewenden Personen umfasst, da nicht zwingend der Wissenschaftler selbst das Interview führt, sondern gegebenenfalls geschulte Testleiter u.ä.

Nach dieser Betrachtung der unterschiedlichen Methoden wird daher deutlich, dass eine Methodentriangulation für diesen Untersuchungsgegenstand, das Verständnis des Ableitungsbegriffs, als geeigneter Ansatz erscheint.

Die Konkretisierung dieser Überlegungen wird mit dem folgenden Kapitel vorgenommen, das neben den Untersuchungsinstrumenten auch Rahmenbedingungen und die Stichprobe beschreibt.

Kapitel 6

Design und Durchführung der Studie

*Jedes Denken wird dadurch gefördert, dass
es in einem bestimmten Augenblick
sich nicht mehr mit Erdachtem abgeben darf,
sondern durch die Wirklichkeit hindurch muss.*

Albert Einstein

Im Folgenden wird die konkrete Durchführung der Studie beschrieben. Zunächst jedoch wird das Forschungsdesign spezifiziert, indem der zeitliche Ablauf und die Untersuchungsinstrumente genauer vorgestellt werden. Anschließend wird auf die praktische und technische Durchführung eingegangen und schließlich eine Bewertung vorgenommen.

6.1 Design der Studie

6.1.1 Zeitliche Struktur der Studie

Die Abbildung 6.1 gibt zum einen grob den thematisch-zeitlichen Ablauf im Mathematikunterricht der 11. Klasse an, wobei vor allem die Dauer der vorangeschalteten Phase von einer zur anderen Klasse variiert. Zum anderen sind die wesentlichen Schritte der geplanten Studie angegeben. So lässt sich der Abbildung 6.1 entnehmen, dass den Schülerinnen und Schülern zunächst ein Leistungstest gestellt wurde, nachdem die ersten Unterrichtsstunden zur Differenzialrechnung stattgefunden haben. Die Ergebnisse des Leistungstests nehmen dann Einfluss auf die Planung des Interviews, das den Schwerpunkt der Studie bildet. Für die Vorbereitung des Interviews ist der Leistungstest hilfreich, da er Anhaltspunkte zu den Fähigkeiten der untersuchten Gruppe von

Elftklässlern⁹ liefert. Da zum Zeitpunkt des Leistungstests mit dem Gebiet der Differenzialrechnung gerade erst begonnen wurde, beinhaltet der Test in stärkerem Maße Aufgaben zu Prozeduren und Anwendungen in Verbindung mit dem Vorwissen, z.B. zum Differenzenquotienten. Aber auch die Vorstellungen der Ableitung als Grenzwert und als Steigung werden erfasst (siehe den Leistungstest im Anhang, ab Seite 175).

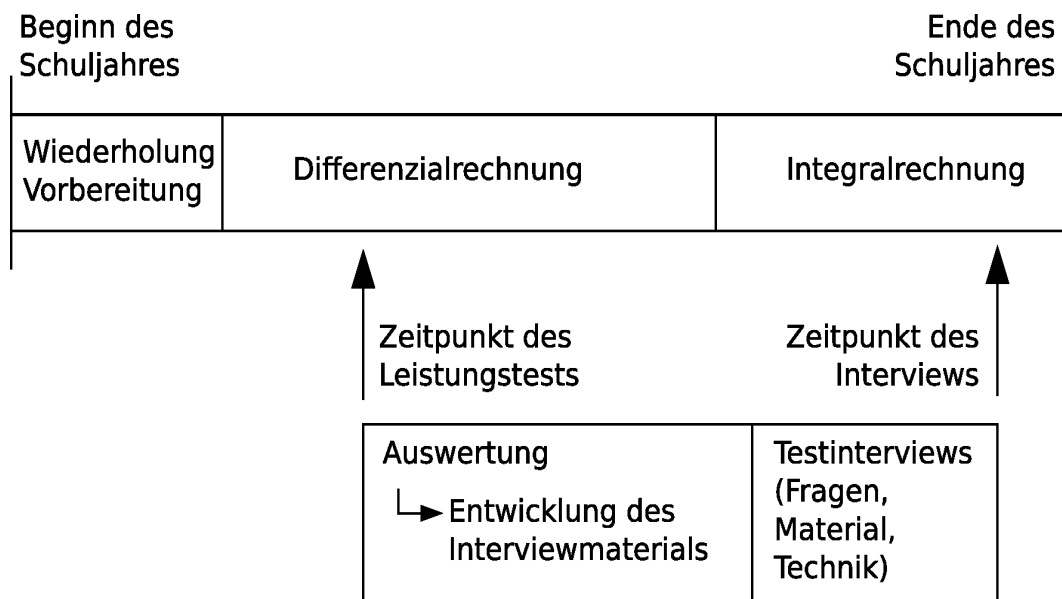


Abbildung 6.1: Zeitlicher Verlauf der Studie

Das Interview folgte auf den Leistungstest (siehe Abbildung 6.1). Der Zeitpunkt des Interviews wurde dabei so gewählt, dass die Unterrichtseinheit zur Differenzialrechnung komplett abgeschlossen war und auch schon einige Zeit zurücklag. Damit wurde gewährleistet, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Interviews ihr Wissen vor allem aus dem Langzeitgedächtnis abrufen mussten und somit eher eigene Formulierungen verwendeten statt auswendig gelernte Sätze wiederzugeben. Im Gegensatz zum Test zielte das Interview außerdem auf Merkmale des Individuums und seiner Wissensstrukturen ab. Entsprechend erschien die Form des Einzelinterviews, in dem eine Untersuchungsperson einem Interviewer gegenübersteht (siehe dazu Abschnitt 5.2.2), besonders geeignet für eine tiefere Untersuchung von Wissensstrukturen auf dem Gebiet der Differenzialrechnung.

⁹Am Test nehmen insgesamt fünf Klassen teil. Idealerweise sollten aus einer dieser Klassen die späteren Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Interview rekrutiert werden.

Einige weitere Kriterien sind an die konkrete Ausgestaltung des Interviews zu stellen gewesen um die gewünschten Ergebnisse zu erzielen. Diese finden sich in allgemeiner Weise bereits in Abschnitt 5.2.2, werden in den folgenden Abschnitten aber mit Bezug zur hier vorliegenden Fragestellung konkretisiert. Sowohl der Leistungstest als auch das Interview werden unter Angabe von Beispielitems genauer dargestellt (Beide Testinstrumente liegen vollständig im Anhang vor, ab Seite 175).

6.1.2 Quantitative Untersuchungsinstrumente

In diesem Abschnitt wird der Leistungstest als quantitatives Instrument weiter spezifiziert. Dabei sind die wesentlichen Aspekte zur besseren Übersicht in tabellarischer Form zusammengefasst (siehe Tabelle 6.1). Beim Leistungstest handelt es sich um einen standardisierten, entsprechend den Anforderungen der quantitativen Forschung konzipierten Test. Er besteht aus einem Geheft von neun Aufgaben zum Ableitungsbegriff sowie benachbarten Begriffen, die innerhalb einer Schulstunde (45 Minuten) zu lösen sind. Den Schwerpunkt bilden offene Aufgabenformate (siehe Abbildungen 6.2 und 6.3), die häufig nach expliziten Begründungen verlangen. Ergänzt werden diese um einige Multiple Choice-Aufgaben und weitere geschlossene Aufgabentypen (siehe Abbildung 6.4). Die Reihung der Aufgaben ist bei allen Geheften identisch, die Reihenfolge der Bearbeitung dagegen den Teilnehmern überlassen. Engere Vorgaben wurden nicht gemacht, da die verwendeten Aufgaben zum einen voneinander unabhängig sind, zum anderen kaum gewährleistet werden kann, dass alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer je Lerngruppe die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben einhalten.

Die Auswertung wurde anhand eines objektiven Beurteilungsmaßstabes vorgenommen, wobei verschiedene Rater jeweils die Schülerlösungen beurteilten und im Anschluss an die einzelnen Korrekturdurchgänge für die unterschiedlich bewerteten Fälle einen Konsens fanden (siehe Abschnitt 5.2.1).

Die in Abbildung 6.2 dargestellte Aufgabe des Leistungstests fragt nach einer Begründung, warum die durchschnittliche Steigung zwischen zwei Punkten für beliebige Graphen identisch ist, wenn sie denn durch diese zwei Punkte verlaufen.

Diese Frage zielt auf den Begriff des Differenzenquotienten ab. Da sich die durchschnittliche Steigung zwischen P und Q nach $\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ bestimmen lässt, gehen offensichtlich ausschließlich die Koordinaten der gemeinsamen Punkte in die Berechnung ein.

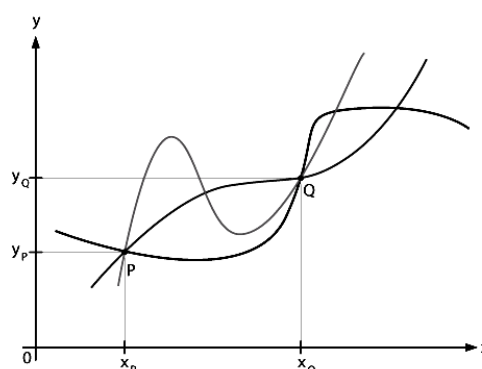
Als weiteres Beispiel für eine solche offene Aufgabe aus dem Leistungstest wird in Abbildung 6.3 die vierte Aufgabe des Tests vorgestellt. Gefragt ist nach der

Aspekt	Leistungstest
Ausrichtung	quantitativ
Testart	standardisierter Testbogen
Aufgabenformat	offen, Multiple Choice
Inhalte	Ableitung und Nachbarbegriffe, durchmisches Anforderungsniveau
Zeit	45 Minuten

Tabelle 6.1: Übersicht zum Leistungstest

2. Aufgabe

Gegeben sind viele (stetige) Graphen (siehe Beispiele in der Graphik), die alle durch zwei vorgegebene Punkte gehen.



Geben Sie eine kurze Begründung an, warum die durchschnittliche Steigung der unterschiedlichen Graphen zwischen P und Q übereinstimmen muss.

Abbildung 6.2: Offene Aufgabe aus dem Leistungstest

Gleichung einer Parabel, die bestimmte Bedingungen erfüllt. Zur Lösung bedarf es hier mehrerer Schritte: Aus der Aufgabenstellung geht zunächst hervor, dass eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ gesucht wird. Weiterhin gehören die Punkte $(0|0)$ und $(1|2)$ zum Graphen der Funktion. Nach Einsetzen der Punkte in die obige Gleichung ergibt sich für die Parameter $c = 0$ und $a + b = 2$. Eine letzte Information aus dem Aufgabentext besagt, dass $(0|0)$ auch zum Graphen der Ableitungsfunktion mit $f'(x) = 2ax + b$ zu zählen ist, womit auch $b = 0$ gilt. Damit ist schließlich $a = 2$ und die gesuchte Parabel folgt der Funktionsvorschrift $f(x) = 2x^2$.

4. Aufgabe

Geben Sie die Gleichung einer Parabel an, die durch den Ursprung und den Punkt $(1|2)$ läuft. Der Graph ihrer Ableitungsfunktion läuft ebenfalls durch den Ursprung.

Abbildung 6.3: Weitere offene Aufgabe aus dem Leistungstest

8. Aufgabe

Verbinden Sie jeweils den Funktionsgraphen (Zeile oben) mit dem Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion (Zeile unten).

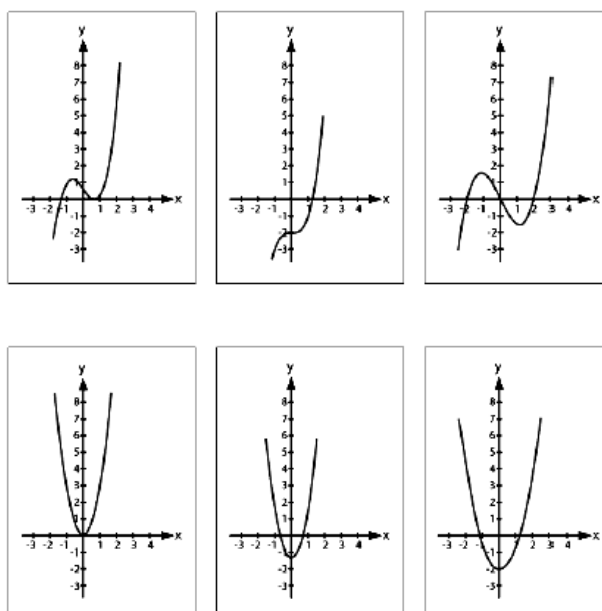


Abbildung 6.4: Geschlossene (Zuordnungs-)Aufgabe aus dem Leistungstest

In Abbildung 6.4 wird zuletzt noch ein anderer Aufgabentyp vorgestellt, bei dem eine Zuordnung von Funktionsgraphen aus der oberen Zeile zu den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktionen aus der unteren Zeile gefordert wird. Anhand der Extrempunkte der Graphen der Ausgangsfunktionen, die sich als Nullstellen in den Graphen der Ableitungsfunktionen zeigen, lässt sich ableiten, dass der Graph ganz rechts sich direkt über dem Graphen seiner Ableitungsfunktion befindet. Hingegen ist für die zwei ersten der richtige Graph der Ableitungsfunktion jeweils unterhalb des anderen Graphen angeordnet.

6.1.3 Qualitative Untersuchungsinstrumente

Ebenso wie im vorangegangenen Abschnitt für den Leistungstest geschehen, sollen hier die für das Interview wesentlichen Aspekte in einer Tabelle dargestellt werden, siehe Tabelle 6.2. Des Weiteren werden auch hier exemplarisch einige Fragen aus dem Fragenkatalog des Interviews (ab Seite 183 des Anhangs) vorgestellt.

Im Interview wird an den Fragen angesetzt, die im Test offen bleiben mussten. So wird im Interview beispielsweise das eigenständige graphische Differenzieren inklusive Erläuterungen erfragt um die Argumentation nachvollziehen zu können und von möglichen zeichnerischen Ungenauigkeiten gegebenenfalls absehen zu können. Im Leistungstest wurde dagegen auf das eigenständige graphische Differenzieren verzichtet.

Das Interview ist zunächst einmal ein Interview, das gemäß der Klassifikation in der qualitativen Sozialforschung, wie sie etwa Lamnek (2005, S. 356) angibt, zu den ermittelnden Interviewformen zu zählen ist. „Bei den ermittelnden Interviews ist der Informationsfluss zwischen Interviewer und Befragtem einseitig vom Befragten auf den Interviewer gerichtet, der bestimmte Informationen erheben möchte“ (Lamnek, 2005, S. 333). Innerhalb der Gruppe der ermittelnden Interviews lassen sich weitere Typen, wie etwa das „narrative“ und das „fokussierte Interview“, unterscheiden. Unter den beiden angegebenen Interviewtypen ist das narrative Interview dabei die weit offenere Form (siehe Abschnitt 5.2.2), in der Fragen nur als Anstoß dienen (Eingangsfrage, erzähl-generierende Frage) und der Befragte weitgehend frei erzählen kann. Das fokussierte Interview ist weit stärker strukturiert und hat einen relativ eingeschränkten Inhaltsbereich zum Thema. Das hier durchgeführte Interview stellt als „Wissensinterview“ eine Sonderform des fokussierten Interviews dar. Es ist ebenfalls stark strukturiert, denn, wie auch der Tabelle 6.2 zu entnehmen ist, wird es als Einzelinterview und auf der Basis eines standardisierten Fragebogens durchgeführt (vgl. Ab-

Aspekt	Interview
Ausrichtung	qualitativ
Intention	ermittelnd
Strukturierung	stark standardisierter Fragebogen
Befragungsform	Einzelinterview
Art der Fragen	offen
Interviewerverhalten	neutral
Zeit	max. 60 Minuten

Tabelle 6.2: Übersicht zum Interview

schnitt 5.2.2). Dabei bedeutet der Einsatz eines standardisierten Fragebogens, dass allen Probanden die identischen Fragen in unveränderter Reihenfolge und bei gleichbleibender Formulierung gestellt werden. Der Auffassung von Schnell und Kollegen (2005) folgend, dass offene Fragen eher geeignet sind, „Aussagen, die auch „tatsächlich“ im Wissensstand [...] des Befragten verankert sind“ zu erhalten (Schnell et al., 2005, S. 332) werden im Interview ausschließlich solche offenen Fragen verwendet (siehe Beispielaufgabe in Abbildung 6.6). „Auf offene Fragen wird eine Antwort in den eigenen Worten des Befragten erwartet. Es werden keine Antwortmöglichkeiten vorgeschlagen; der Befragte übernimmt selbst die Formulierung seiner Antwort“ (Schnell et al., 2005, S. 330). Da die Mathematik aufgrund ihrer Formelsprache gewisse Besonderheiten aufweist, ist es ab und an einfacher sich schriftlich auszudrücken, so dass es in diesem Interview allen Befragten grundsätzlich freigestellt wurde mündlich, schriftlich oder auch auf beiderlei Arten auf die Fragen zu antworten. Das Beispiel in Abbildung 6.5 illustriert dies: Es sind zwei differenzierbare Funktionen anzugeben, die auf die identische Ableitungsfunktion führen. Diese Funktionen lassen sich beispielsweise als Funktionsgleichung oder auch graphisch angeben. Als Funktionsgleichungen lassen sich im einfachsten Fall konstante Funktionen, wie etwa $f(x) = 1$ und $g(x) = 2$ nennen. Nach den Ableitungsregeln ergibt sich dann für die Konstanten $f'(x) = g'(x) = 0$. Ein anderer Lösungsweg nutzt die Interpretation der Ableitung als Steigung des Funktionsgraphen. Gesucht werden also zwei Graphen, die in allen Punkten die gleiche Steigung haben. Zur Ursprungsgeraden mit der Gleichung $f(x) = x$ etwa ist jede beliebige Gerade mit $g(x) = x + c$ mit reellem $c \neq 0$ eine parallele und daher steigungsgleiche Gerade. Zur korrekten Beantwortung der Frage lässt sich dies auch rein verbal mit dem Verschieben eines Ausgangsgraphen um eine Konstante umschreiben. Die Nachfrage ist in diesem Fall (siehe Abbildung 6.5) eine Hilfe, die jedoch die Interpretation der Ableitung als Steigung nicht vorwegnimmt.

3. a Geben Sie Beispiele an für zwei differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen überall übereinstimmen.

(Nachfrage: Beginnen Sie damit eine (möglichst einfache) Funktion hinzuschreiben. Finden Sie dann die passende zweite dazu.)

Abbildung 6.5: Beispielfrage aus dem Interview

In den zwei weiteren Beispielen, den Abbildungen 6.6 und 6.7 werden gerade die Aufgaben dargestellt, die explizit zeichnerische Lösungen verlangen.

3. c Zeichnen Sie, wie für Sie der Graph einer differenzierbaren Funktion aussieht, deren **Ableitung überall negativ** ist.

(Nachfrage: Zeichnen Sie einen zweiten Graphen ein, der sich vom ersten möglichst stark unterscheidet, dessen Ableitung aber auch überall negativ ist.)

Abbildung 6.6: Zeichenaufgabe aus dem Fragenkatalog des Interviews

In der Aufgabe 3c (siehe Abbildung 6.6) ist zunächst der Graph einer Funktion zu zeichnen, deren Ableitungsfunktion an allen Stellen negative Werte hat. Diese Forderung erfüllen alle streng monoton fallenden Graphen. Die Zeichnung eines von links oben nach rechts unten verlaufenden Graphen stellt damit eine richtige Lösung dar. Die Nachfrage wurde in den Fällen gestellt, in denen die Befragten eine spezielle Lage des Graphen zum Koordinatensystem wählten, etwa im dritten Quadranten.

Aufgabe 4 schließlich thematisiert das graphische Differenzieren (siehe Abbildung 6.7). Zu einem Graphen einer differenzierbaren Funktion ist der Graph der Ableitungsfunktion in ein neues Koordinatensystem zu zeichnen, welches im selben Maßstab unterhalb der Ausgangsfunktion angegeben ist. Eine richtige Lösung zeigt einen Graphen, der von links kommend zunächst oberhalb der Abszisse verläuft, dann durch den Ursprung geht und zwischen 0 und etwa 0,6 unterhalb der Abszisse verläuft. Ab einem Wert von 0,6 beginnt im Ausgangsgraphen ein Geradenstück, dass sich in der Ableitungsfunktion als Parallele zur Abszisse einzeichnen lässt, die bei einem Wert von etwa $\frac{2}{3}$ verläuft.

Gemäß den Empfehlungen für das ermittelnde Interview wurde ein Interviewerverhalten gezeigt, welches Neutralität gegenüber der Sache ausdrückt, dem Befragten gegenüber aber eine aufmunternde „Haltung freundlichen Gewährlassens“ demonstriert (Schnell et al., 2005, S. 324).

Die Interviews hatten eine Länge von durchschnittlich etwa 45 Minuten, wobei das Interview mit Ronja mit gerade 35 Minuten am kürzesten, das mit Marina mit 57 Minuten am längsten war. Diese Zeitangabe umfasst das eigentliche Interview, bestehend aus insgesamt 13 Fragen (siehe Anhang, ab Seite 183), sowie die angeschlossenen Mappingaufgaben, die auf die in Abschnitt 5.2.3 beschriebenen Verfahren zurückgehen. Diese Aufgaben bestehen kurzgefasst darin begriffliche Nähe und begriffliche Zusammenhänge durch räumliche Nähe von Begriffskärtchen zueinander zu veranschaulichen (siehe Anhang ab Seite 191 für die Arbeitsaufträge sowie die verwendeten Begriffe und Relationen).

Der Zweck der Begriffskärtchen und der zu erstellenden Maps besteht darin es den Teilnehmerinnen und Teilnehmern zu erleichtern über diese Begriffe zu sprechen. Insbesondere waren die Relationen zwischen den Begriffen zu nennen und zu erklären.

Während des gesamten Interviews wurde der Ton aufgezeichnet. Niederschriften, in Form von Rechnungen und Skizzen sowie gelegte Concept Maps wurden mit der Kamera festgehalten. Alle schriftlichen Aufzeichnungen wurden einbehalten und archiviert¹⁰.

¹⁰Auf Anfrage ist auch eine CD Rom erhältlich.

4. Im Bild sehen Sie den Graphen einer differenzierbaren Funktion. Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion zu dieser Funktion **als Skizze** in das leere Koordinatensystem.

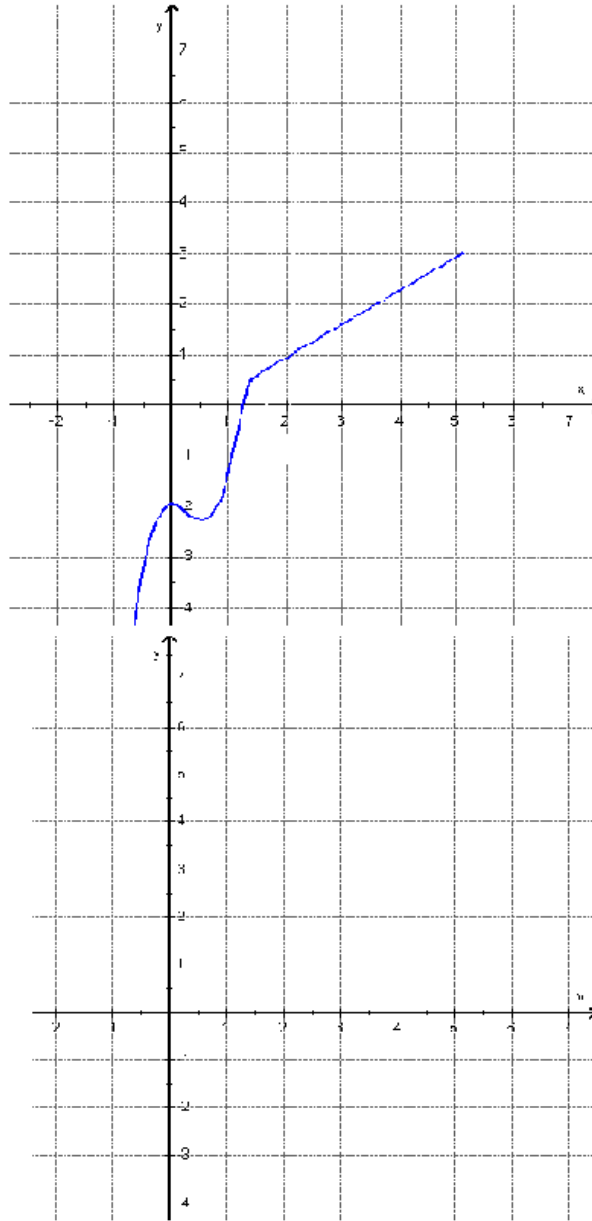


Abbildung 6.7: Aufgabe des Interviews zum graphischen Differenzieren

6.2 Durchführung der Untersuchung

6.2.1 Ablauf der Untersuchung

Zunächst wurde der Leistungstest nach der Zielvorgabe ein Aufgabenset zu erstellen, welches inhaltlich auf den Anfängen der Differenzialrechnung aufbaut (z.B. Begriff der durchschnittlichen Steigung, siehe Aufgabe 7 im Leistungstest ab Seite 175), entwickelt. Das Ergebnis ist ein Test, der verschiedene geschlossene und offene Aufgaben umfasst, die in ihren Formulierungen kurz und präzise gehalten und innerhalb von 45 Minuten zu lösen sind. Damit kann der Test für eine explorative Vorstudie zu prozeduralen wie konzeptuellen Aspekten des Begriffswissens zur Differenzialrechnung genutzt werden.

Durchgeführt wurde der Test dann in der Schule, einige Wochen nach den Sommerferien unter Beaufsichtigung eines Testleiters sowie des Fachlehrers. Für die 45-minütige Bearbeitungszeit wurde eine Mathematikstunde zur Verfügung gestellt. Der Test lag dabei als Papiergeheft vor, auf dessen Deckblatt die Schülerinnen und Schüler ein Pseudonym eintrugen und einige Daten, wie Geschlecht und Alter, angaben.

In der Folge wurden die Testbögen zügig ausgewertet um die Ergebnisse direkt in die Entwicklung der Interviews eingehen zu lassen. Im Vorfeld der Durchführung der Interviews wurden die beteiligten Fachlehrer zu ihrem Unterricht befragt, insbesondere zu den eingeführten Begrifflichkeiten:

Die nicht-standardisierte Befragung der beiden Fachlehrer ergab, dass beide die Differenzialrechnung ähnlich und mit ähnlichen Begriffen aufbauten. Dabei wurde zumindest zu Beginn der Einheit zwischen der ‚Ableitung in einem Punkt‘ und der ‚Ableitungsfunktion‘ unterschieden. Den Schülerinnen und Schülern ist das Tangentenproblem bekannt. Sie haben zur Berechnung der Ableitung über den Grenzwertprozess die Schreibweise des Limes kennen gelernt. Dabei wurden allerdings verschiedene Wege favorisiert, d.h. nur im einen Fall ist die sogenannte h -Methode über die Unterrichtssequenz als Standardverfahren eingesetzt worden, im anderen wurde der Grenzwert von $x \rightarrow x_0$ gebildet. Grundsätzlich sind den Schülerinnen und Schülern aber beide Verfahren bekannt. Auch in der entsprechenden Interviewsituation wurde ihnen die Wahl der Schreibweise überlassen. Die „Änderungsrate“ wurde in keiner der beiden Lerngruppen thematisiert.

Diese Informationen hatten zum einen den Zweck die Interviewfragen und die Beschriftungen der Begriffskärtchen von Schwierigkeiten frei zu halten, die rein auf der Verwendung unüblicher Bezeichnungen beruht hätten. Zum anderen helfen die Angaben darüber, welche Schwerpunkte im Unterricht gesetzt wurden, auch bei der Einordnung der Ergebnisse, d.h. diese Informationen sind für die Auswertung im Anschluss nützlich.

Die eigentlichen Interviews mit den Schülerinnen und Schülern wurden dann in der Schule durchgeführt, damit die Befragten in ihrem gewohnten Umfeld bleiben konnten.

Bevor die Interviews mit den Schülern geführt wurden, fanden zunächst ein paar Test-Interviews mit Studenten statt. Diese Interviews dienten zum einen dazu die Interviewfragen auf ihre Verständlichkeit hin zu prüfen. Zum anderen wurden dabei gleichzeitig die eingesetzten Materialien und technischen Geräte erprobt.

6.2.2 Teilnehmer und Untersuchungsumfeld

Die Rekrutierung der Schülerinnen und Schüler, die an dieser Studie teilnahmen, erfolgte nach freiwilligen Meldungen. Die Teilnehmer stammen aus zwei Klassen des 11. Jahrgangs von städtischen Gymnasien. Die erste Lerngruppe, die aus neun Schülerinnen und acht Schülern zwischen 16 und 18 Jahren bestand, hat den Leistungstest ausgefüllt. Unter den teilnehmenden Personen fanden sich nur fünf Schülerinnen, die bereit waren an der mündlichen Befragung teilzunehmen. Im Hinblick auf die Auswertung ist diese Anzahl zu gering, so dass abweichend von der ursprünglichen Planung Lernende aus einer zweiten Lerngruppe an einem anderen Gymnasium für weitere Interviews rekrutiert wurden. Insgesamt wurden so noch sieben weitere Schülerinnen und Schüler für die Studie gewonnen. Der Umstand, dass die letztgenannten Schülerinnen und Schüler nicht am Leistungstest teilgenommen haben, ist faktisch nicht relevant, da der Leistungstest lediglich als Vorstudie eingesetzt wurde. Weiterhin ist das Interview speziell geeignet, ein möglichst genaues Profil jedes einzelnen Teilnehmers, bezüglich der zuvor genannten Aspekte (siehe Forschungshypothesen in Abschnitt 5.1.2), zu erstellen. Außer der Tatsache, dass alle Teilnehmer in diesem Schuljahr erstmals mit dem Gebiet der Differenzialrechnung in Berührung gekommen sein sollten, wurden keine weiteren, einschränkenden Kriterien verlangt um an der Interviewstudie teilzunehmen, wobei eine gewisse Breite bezüglich des abgebildeten Leistungsniveaus der Überprüfung der Forschungshypothesen sicherlich zuträglich ist.

6.2.3 Material und technisches Zubehör

Bei dem eingesetzten Leistungstest handelt es sich um einen klassischen paper & pencil Test (der eingesetzte Papierbogen entspricht – abzüglich des Deckblatts – dem Dokument im Anhang ab Seite 175). Wie bereits zuvor beschrieben handelt es sich dabei um einen standardisierten, auf 45 Minuten ausgelegten Test, der Aufgaben zum Begriff der Ableitung und zu dessen Nachbarbegriffen beinhaltet, siehe Abschnitt 6.1.2 bzw. insbesondere Tabelle 6.1.

Für jedes der Interviews bzw. jeden Teilnehmer gibt es eine eigene Mappe, bestehend aus

- den **Interviewfragen**: drei Blätter als Leitfaden für den Interviewenden (siehe Anhang, ab Seite 183),
- einzelnen **Arbeitsblättern**: ergänzendes Material zu den Fragen, für die sich eine schriftliche Bearbeitung unmittelbar anbietet (als DinA4- oder DinA5-Ausdruck auf gelbem Papier) und
- einem **Kurzprotokoll**: ein einseitig bedruckter Bogen, in dem im Anschluss an das Interview vom Interviewer Rahmendaten wie Zeit und Ort, Eindrücke und Besonderheiten des Schülers, sowie Störungen und Auffälligkeiten während der Interviewsituation festgehalten werden.

6.3 Bewertung

Der Leistungstest konnte störungsfrei durchgeführt werden. Die Schüler waren zuvor seitens des Fachlehrers bereits über das Vorhaben informiert worden, so dass volle 45 Minuten für die Bearbeitung der Testaufgaben zur Verfügung standen. Es zeigte sich, dass diese Zeit ausreichend war um alle Fragen zu beantworten. Ungünstigerweise waren allerdings zu dem Zeitpunkt der Testdurchführung einige Schülerinnen und Schüler der Klasse erkrankt, so dass nur 17 Personen teilnahmen.

Insgesamt wurden 12 Interviews durchgeführt, die alle vollständig aufgezeichnet wurden und somit in die Auswertung aufgenommen werden können. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer ließen sich alle bereitwillig auf das Interview ein. Um Hemmungen abzubauen, durften die Befragten zunächst selbst durch die fest aufgebaute Kamera schauen und sich so vergewissern, dass sie, abgesehen von ihren Händen, nicht im Bild erscheinen würden. Soweit möglich wurde die Kamera im Vorfeld außerdem so aufgestellt, dass sie nicht unmittelbar ins Blickfeld der interviewten Person reichte. Zudem bekamen sie ausführlich dargestellt, welchen Wert ihre Teilnahme für die ganze Studie besitzt und welche Möglichkeiten ihnen zur Verfügung stehen um das Gespräch zu lenken, insbesondere also eine Frage zurück zu stellen oder das Interview irgendwann selbst zu beenden.

Von diesen angebotenen Möglichkeiten wurde auch Gebrauch gemacht, wobei in einem Fall versehentlich die Reihenfolge zweier Fragen vertauscht wurde. Dies kann aber als irrelevant betrachtet werden, da just diese Fragen keinen unmittelbaren thematischen Zusammenhang abbildeten, also ohnehin eher zufällig angeordnet waren und zudem vom Anspruchsniveau als etwa vergleichbar angesehen werden dürfen.

Kapitel 7

Ergebnisse

*Die Fragen sind es,
aus denen das, was bleibt,
entsteht.*

Erich Kästner:
Sokrates zugeeignet.

Die Auswertung der Studie orientiert sich in seiner Struktur sowohl an der Chronologie der Untersuchung als auch an den Forschungshypothesen. Begonnen wird daher mit der Auswertung des Leistungstests, bevor dann mit dem Hauptteil, der Auswertung der Interviews fortgefahren wird. Jeder Abschnitt nimmt konkret auf eine der Forschungshypothesen Bezug oder leistet einen vorbereitenden und strukturierenden Beitrag. Die wesentlichen Ergebnisse werden am Ende noch einmal zusammengefasst.

7.1 Auswertung des Leistungstests

Am Leistungstest haben 17 Personen teilgenommen, die einen regulären Mathematikunterricht erfahren haben, und aus denen schließlich einige Kandidaten für das Interview rekrutiert wurden.

Die geringe Personenzahl hat zur Folge, dass umfangreiche statistische Analysemethoden nicht sinnvoll angewendet werden können. Ein Überblick über die Verteilung der Summenscores (siehe Abbildung 7.1) gibt dennoch Auskunft über die Angemessenheit des Testniveaus für diese Personengruppe sowie über die Streuung der Leistungen.

7.1.1 Verteilung der Summenscores

Alle neun Aufgaben des Tests (siehe Tabelle 7.1 bzw. die Aufgaben im Anhang) wurden trotz unterschiedlicher Anforderungen in Niveau und Umfang gleich gewichtet: Für jede Aufgabe des Tests wurde maximal ein Punkt vergeben. Dabei wurden null Punkte vergeben, wenn Aufgaben gar nicht oder in nicht nachvollziehbarer Weise bearbeitet wurden. Einen halben Punkt gab es bei richtigen Ansätzen bzw. ebenso bei korrekt gelösten Teilaufgaben. Für eine richtige Lösung schließlich gab es einen Punkt, so dass für die 17 Personen insgesamt neun Punkte zu erreichen waren. Die Bewertung wurde für jede Aufgabe von mindestens zwei Ratern vorgenommen. Bei Uneinigkeit wurde diskutiert bis ein Konsens gefunden wurde. Halbe Punkte, die sich aus der vorangegangenen Bewertung ergeben haben, wurden in der Summe am Ende aufgerundet.

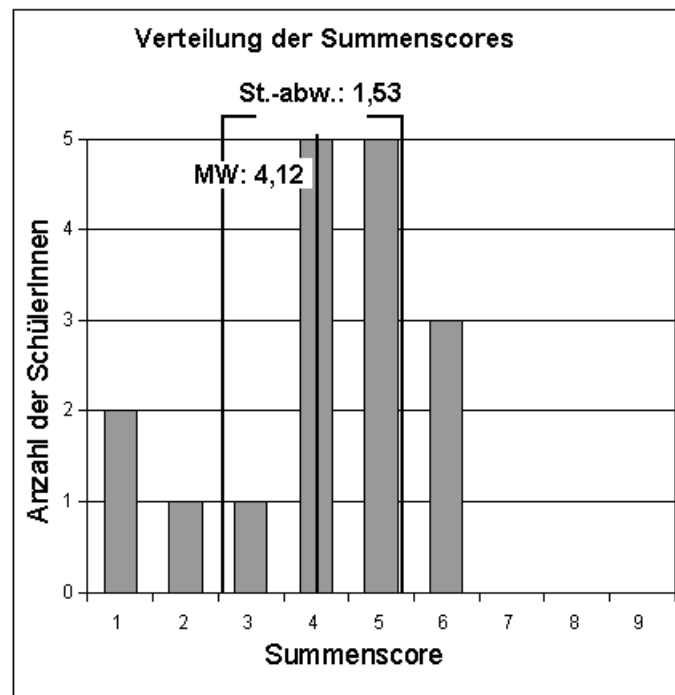


Abbildung 7.1: Verteilung der Summenscores im Leistungstest

Im Mittel erreichten die 17 Teilnehmer 4,12 Punkte im Test bei einer Standardabweichung von 1,53 Punkten. In Abbildung 7.1 ist die Verteilung dargestellt. Auf dieser Basis können weitere Auswertungen folgen, für die der Fokus aber nur noch auf bestimmte Aufgaben gerichtet wird.

7.1.2 Einordnung der Testaufgaben

Einen Überblick über die im Leistungstest gestellten Anforderungen gibt Tabelle 7.1, in der die Aufgaben nicht dem Wortlaut nach aber doch sinngemäß dargestellt sind (ihrem Wortlaut nach im Anhang ab Seite 175). Als Aufgabenformate kommen offene und Multiple Choice- Fragen vor, wobei letztere durch ein „(MCQ)“ kenntlich gemacht sind. Neben einer stichwortartigen Beschreibung der Aufgaben findet in der Spalte ganz rechts für eine Auswahl der Aufgaben eine Einordnung statt. Diese Aufgaben (in Fettdruck), Nummern 1, 3, 5, 7 und 8, sind im Zusammenhang mit der in dieser Arbeit entwickelten Fragestellung relevant und werden gemäß der in Abschnitt 4.2 (Aspekte des Ableitungsbegriffs) vorgestellten Begrifflichkeiten einsortiert. Die Bezeichnung „Anwendung“ beschreibt dabei Aufgaben, die nur durch die Kombination von konzeptuellem und prozeduralem Wissen zu lösen sind. So ist es bei Aufgabe 5 (siehe Abbildung 7.2) zielführend sich zunächst zu überlegen, dass die quadratischen Funktionen, die mit der angegebenen Gleichung beschrieben werden, nur im Fall $a = 0$ durch den Ursprung verlaufen. Also ist die erste Aussage nicht für alle Funktionen dieses Typs zutreffend. Im weiteren werden die Prozedur des symbolischen Differenzierens und die Anschauung der Ableitungsfunktion als Funktionsgraph zur Lösung benötigt. Das symbolische Differenzieren führt zu $f'(x) = 2x$, was einer Geraden durch den Ursprung entspricht. Da Ursprungsgeraden außerdem punktsymmetrisch zum Ursprung sind, sind nur die zwei letzten Aussagen als richtig anzukreuzen.

Ein anderes Beispiel zeigt sich in Aufgabe 8 (siehe Abbildung 6.4 auf Seite ??): Vereinfacht lässt sich das graphische Differenzieren als Prozedur auffassen. Dabei ist jedoch zu bedenken, dass diese Prozedur auf der Anschauung der Ableitung als Steigung fußt.

Die übrigen Aufgaben in Tabelle 7.1 mit den Nummern 2, 4, 6 und 9 werden im folgenden nicht weiter berücksichtigt, da sie aufgrund anderer Forschungsinteressen in den Test aufgenommen worden waren und keine unmittelbare Relevanz für die Fragestellungen dieser Arbeit haben (siehe Abschnitt 5.1.2).

7.1.3 Ergebnisse für einzelne Aufgaben

Die durchschnittlich erreichten Punktzahlen für die zuvor in Tabelle 7.1 in Fettdruck angegebenen, ausgewählten Aufgaben sind in Abbildung 7.3 dargestellt. Neben einer Reduktion auf die Aufgaben, die auch weiterhin Relevanz haben, werden aus Gründen der Übersichtlichkeit die ursprünglichen Aufgabennummern beibehalten. Die Säulen des Diagramms (Abbildung 7.3) stehen für die Anzahlen der mit null Punkten (weiß), mit einem halben Punkt (grau) und mit einem Punkt (schwarz) bewerteten Aufgabenbearbeitungen.

5. Aufgabe

Überlegen Sie sich, ob folgende Aussagen für alle verschobenen Normalparabeln mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2 + a$ gelten. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an.

- ☐ Der Funktionsgraph verläuft durch den Ursprung.
- ☐ Der Graph der Ableitungsfunktion verläuft achsensymmetrisch zur y -Achse.
- ☐ Der Graph der Ableitungsfunktion verläuft punktsymmetrisch zum Ursprung.
- ☐ Der Graph der Ableitungsfunktion verläuft durch den Ursprung.

Abbildung 7.2: Aufgabe aus dem Leistungstest

Bei Betrachtung des Diagramms fallen insbesondere die Aufgabe 8 (siehe Abbildung 6.4) bzw. dann auch die Aufgabe 3 ins Auge. Für diese beiden Aufgaben bekommen die Testteilnehmer besonders schwache Leistungen von durchschnittlich 0,27 Punkten für Aufgabe 3 und 0,20 Punkten im Durchschnitt für Aufgabe 8 attestiert.

Der genauere Blick auf die Inhalte soll qualitative Hinweise über die Fähigkeiten und Defizite der Untersuchungsteilnehmer liefern. Zunächst wird Aufgabe 1 betrachtet (siehe Abbildung 7.4). Hier werden die Gleichungen von drei Funktionen angegeben, die nach den Ableitungsregeln durch einfache Formelmanipulation differenziert werden sollen. Die Ergebnisse sind $g'(x) = 20x^4$, $h'(x) = 12x^2 + 6x$ und $j'(x) = 12x$. Diese Aufgabe ist vergleichsweise leicht und wurde gezielt an den Anfang des Tests gesetzt.

Eine Schwierigkeit stellte den Bearbeitungen nach zu urteilen jedoch die letzte der drei angegebenen Funktionsgleichungen dar, da sie nämlich eine Konstante enthielt. Diese zu differenzieren hatten die Schülerinnen und Schüler zum Zeitpunkt des Tests noch nicht im Unterricht gelernt. Einige Teilnehmer haben sich diese Regel jedoch herleiten können. Sie können sie über das Aufstellen des Differenzenquotienten und eine sich anschließende Grenzwertbetrachtung erhalten haben oder aus der Anschauung als Steigung. Für das richtige symbolische Differenzieren in allen drei Fällen gab es einen Punkt. Vielfach wurde die Konstante einfach beibehalten, so dass nur ein halber Punkt vergeben wurde.

Nr	Anforderung(en)	Einordnung
1	Ableiten nach Ableitungsregeln (siehe Abbildung 7.4)	symbolisches Differenzieren
2	gleiche durchschnittliche Steigung verschiedener Graphen begründen (siehe Abbildung 6.2 auf Seite 78)	
3	a) Deutung als Steigung (MCQ) b) Trendaussage, Entwicklung von Funktionswerten (MCQ) (siehe Abbildung 7.5)	Deutung als Steigung und Änderungsrate, Anwendung
4	Parabel und ihre Ableitung mit besonderen Eigenschaften bestimmen (siehe Abbildung 6.3 auf Seite 79)	
5	Symmetrie und Lage von (Ableitungs-) Funktion mit $f(x) = x^2 + a$ (MCQ) (siehe Abbildung 7.2)	Anwendung
6	Ableitung per Grenzwertbildung, Fehler-suche (Limes)	
7	Erklärung des Begriffs „durchschnittliche Steigung“	konzeptuell zum Vorwissen
8	Zuordnung von Graphen zu Ableitungsgraphen (siehe Abbildung 6.4)	graphisches Differenzieren (analytisch)
9	Identifizieren der nicht-differenzierbaren Stellen	

Tabelle 7.1: Anforderungen des Leistungstests

Wenigen Personen unterliefen andere Fehler, die keine Regelhaftigkeit erkennen ließen.

Aufgabe 3 besteht aus zwei Aufgabenteilen im Multiple Choice-Format (siehe Abbildung 7.5). Im ersten Teil ist nach korrekten Interpretationen der Ableitung gefragt. Richtig ist allein, dass die Ableitung an einer Stelle ein Maß dafür ist, wie steil der Graph der Funktion dort ist.

Insgesamt 14 Personen haben diese Möglichkeit gewählt, sieben davon aber auch weitere. Von den 17 Personen waren immerhin sieben Personen der Meinung, dass die Ableitung den Funktionswert an dieser Stelle angibt. Ebenfalls sieben stimmten zu, dass mithilfe der Ableitung zu entscheiden sei, ob der Funktionswert an der betreffenden Stelle einen positiven oder einen negativen

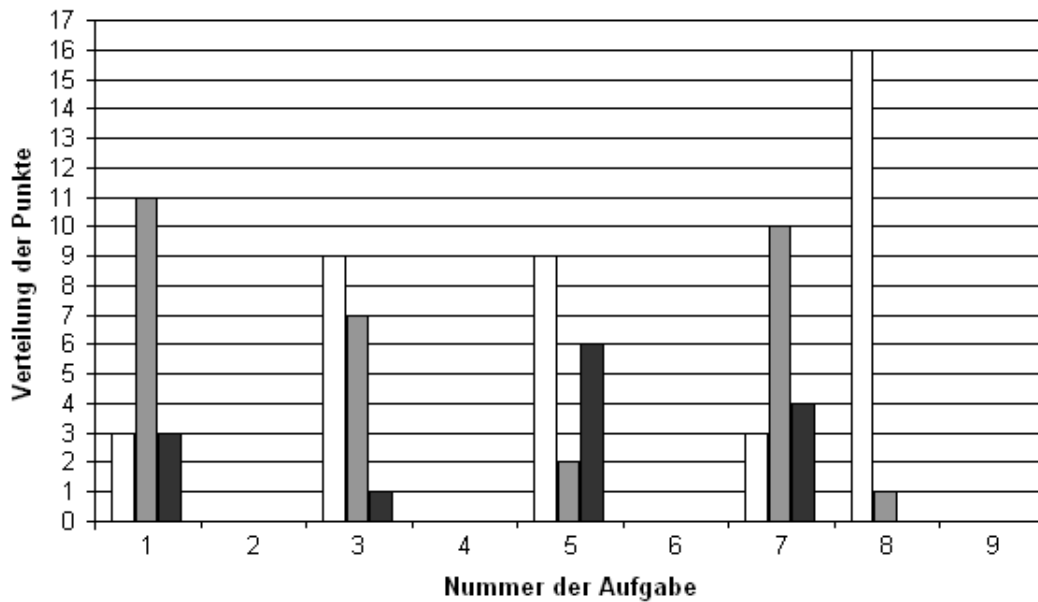


Abbildung 7.3: Durchschnittlich erreichte Punktzahlen nach Aufgaben

Wert hätte. Dabei zählen sechs dieser Personen zu den zuvor genannten, die der Meinung waren, dass die Ableitung den Funktionswert angibt. Demnach scheinen die Teilnehmer die Antwortalternativen in diesem Aufgabenteil gezielt und nicht etwa zufällig gewählt zu haben. Bei Betrachtung nur dieses Aufgabenteils ergibt sich ein Durchschnittswert von 0,47 Punkten. Verglichen damit zeigten die Schüler beim zweiten Teil der Aufgabe 3 mit durchschnittlich 0,18 Punkten die deutlich schwächeren Leistungen. Die Ableitung war hier als Änderungsrate zu betrachten bzw. für eine Trendaussage heranzuziehen (siehe Abbildung 7.5). Im Aufgabentext sind der Funktionswert einer differenzierbaren Funktion an einer Stelle und die Ableitung an dieser Stelle vorgegeben. Unter verschiedenen Vorschlägen für einen Funktionswert an einer um 0,001 Einheiten verschobenen Stelle, war die aus den vorangestellten Angaben sinnvollste oder wahrscheinlichste Abschätzung auszuwählen. Unter der Annahme, dass die Ableitung die Steigung nicht nur für einen Punkt sondern auch für ein sehr kleines Intervall um diesen Punkt herum angibt bzw. bestmöglich annähert, ist die zweite Abschätzung die beste Wahl. An der Stelle $x = 2,001$ ist der Steigungsfaktor mit 4 abzuschätzen, so dass der Funktionswert sich berechnet nach $f(2,001) = f(2) + 4 \cdot 0,001 = 4 + 4 \cdot 0,001$. Diese Aufgabe wurde von gerade einmal drei Personen erfolgreich gelöst. Zusammenfassend ergab sich

1. Aufgabe

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen und schreiben Sie so kurz wie möglich.

a) $g(x) = 4 \cdot x^5$

b) $h(x) = 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3$

c) $j(x) = 2 \cdot x^2 + 3 + 4 \cdot x^2$

Abbildung 7.4: Aufgabe des Leistungstests zum symbolischen Differenzieren

für Aufgabe 3 dennoch ein Durchschnittswert von 0,33 von insgesamt einem Punkt, für den beide Aufgabenteile gleichgewichtet bewertet wurden.

Auch bei Aufgabe 5 (siehe Abbildung 7.2) war zwischen mehreren möglichen Antworten eine Wahl zu treffen (ausgeführt mit erläuterter Lösung in Abschnitt 7.1.2). Im Durchschnitt wurden 0,41 Punkte erzielt.

Aufgabe 7 ist eine offene Aufgabe in der eine Erklärung des Begriffs der durchschnittlichen Steigung gefordert war (siehe Abbildungen 7.6 und 7.7). Einen halben Punkt gab es bereits, wenn die richtige Idee zu erkennen war (vgl. Abbildung 7.6). Viele Bearbeitungen zeigten große Ungenauigkeit; eher selten wurden Variablen eingeführt bzw. im Text wieder aufgegriffen, wenn eine erstellte Skizze sie enthielt. Ein Differenzenquotient wurde in keinem einzigen Fall aufgestellt und nur in zwei Fällen ein Steigungsdreieck in eine Skizze eingezeichnet. Dagegen wurde aber fünf Mal auf den Begriff der Sekantensteigung verwiesen, zwei weitere Male beinhaltete die Erklärung die „lineare Steigung“ zwischen zwei Punkten bzw. den Begriff der Strecke. Durchschnittlich wurden 0,5 Punkte erreicht.

Bei Aufgabe 8 handelt es sich um eine Zuordnungsaufgabe, die bereits als Beispiel vorgestellt wurde, siehe Abbildung 6.4. Dabei ist zu drei abgebildeten Funktionsgraphen jeweils einer der dargestellten Graphen von Ableitungsfunktionen zu wählen. Benötigt wird für die Lösung die Deutung der Ableitung als Steigung bzw. das graphische Ableiten (Darstellung der Lösung in Abschnitt 6.1.2). Der niedrige Durchschnittswert von 0,2 Punkten überrascht, denn da es für diese Aufgabe im geschlossenen Format nur sechs mögliche Kombinationen geben kann, liegt selbst die Ratewahrscheinlichkeit bereits bei

einem Sechstel bzw. gerundeten 0,17 Punkten. Tatsächlich hat keine einzige Person alle drei Graphenpaare einander richtig zuordnen können.

7.1.4 Konsequenzen für das Interview

Die oben dargestellten Ergebnisse sind für das Design des Interviews bedeutsam, zeigen sie doch bereits einige interessante Aspekte. Das Ergebnis von Aufgabe 1 weist zunächst darauf hin, dass es den Teilnehmern nicht schwer fiel die gelernten Regeln zur Ableitung direkt umzusetzen. Allerdings gelang es nur sehr wenigen Teilnehmern sich die fehlende Regel bzw. Erweiterung für die Ableitung von Konstanten zu erschließen. Wie zuvor bereits erwähnt (siehe Abschnitt 7.1.3), kann hierzu die Vorstellung der Ableitung als Steigung helfen. Um nachzuvollziehen, warum die Schülerinnen und Schüler an dieser Stelle nicht weiterarbeiten konnten, kommen nach Abschnitt 2.3.1 zum fehlerhaften Wissen zwei grundsätzliche Erklärungen infrage. Entweder die benötigten Vorstellungen fehlen vollständig oder dieses Wissen ist unzureichend an das Schema des Ableitungsbegriffs (siehe Abschnitt 4.2.1) angebunden und somit nicht unmittelbar verfügbar. Auf der Grundlage der bisherigen empirischen Ergebnisse (siehe Abschnitt 4.3.1) liegt die Vermutung nahe, dass eher letzteres zutrifft (siehe auch die Forschungshypothesen in Abschnitt 5.1.2).

Aufgabe 3 kann zumindest erste Ansätze zur Klärung liefern, denn sie fragt nach den Vorstellungen zur Ableitung, wenn auch nur im Multiple Choice-Format. Mit durchschnittlich 0,47 Punkten ist die Lösungsrate in Aufgabe 3a mit der in Aufgabe 1 vergleichbar. Daher ist vorsichtig anzunehmen, dass die Vorstellung der Ableitung als Steigung durchaus bei einigen Teilnehmern vorhanden ist.

Damit ist jedoch die Frage nach der Qualität des Wissens um die Vorstellungen noch nicht geklärt. Denn innerhalb einer Multiple Choice-Aufgabe braucht die Lösung nicht selbst konstruiert sondern nur erkannt zu werden. Weiterhin lässt sich bei einer Auswahl von Antwortalternativen auch durch Ausschluss der Distraktoren zum Ziel gelangen, ebenso durch Raten usw.

Dennoch ist es überdies bemerkenswert, dass bei Aufgabe 3a (siehe Abbildung 7.5) derart viele Personen angeben, dass aus dem Wert für die Ableitung Aussagen darüber möglich sind, ob der Funktionswert positiv oder negativ ist (sechs Personen) bzw. dass der Funktionswert selbst bestimmt werden könne (sieben Personen), wobei allerdings fünf Personen beide Aussagen gewählt haben. Zu beachten ist, dass dieser Test stattgefunden hat, als die Schülerinnen und Schüler noch nicht mit der Integralrechnung konfrontiert worden waren und etwaige Verwechslungen mit der Tatsache, dass Funktionsgleichungen aus den Ableitungsfunktionen zu rekonstruieren sind, ausgeschlossen werden können.

Vor diesem Hintergrund muss der Eindruck entstehen, dass die Vorstellungen der Befragten zum Ableitungsbegriff teils recht diffus sind. Es schließt sich Aufgabenteil 3b an, der den Begriff der Änderungsrate zur Lösung benötigt. Weil die Lernenden hier besonders schlecht abschnitten, stellt sich die Frage, ob sie über den allgemeinen Begriff der Änderungsrate überhaupt verfügen. Da diese Frage sich mit dem Instrument des Tests nicht beantworten lässt, wird hierzu ein Interview eingesetzt um zu genaueren Ergebnissen zum konzeptuellen Wissen zu gelangen, insbesondere zu den Vorstellungen zum Ableitungsbegriff.

Auch in Aufgabe 5 gilt, dass prozedurale und konzeptuelle Wissensanteile miteinander zu kombinieren sind (siehe Abschnitt 7.1.2). An konzeptuellem Wissen bedarf es dann jedoch keinesfalls neuer Wissensinhalte sondern der Parabel als Graph der quadratischen und der Geraden als Graph der linearen Funktion. Dabei wäre es zulässig gewesen die Situation zu skizzieren, etwa um den Einfluss eines Parameters der quadratischen Gleichung auf die Lage der Parabel zu überprüfen. Es fällt auf, dass diese Aufgabe kaum gelingt (0, 41 Punkte), trotz dessen, dass die Aussagen doch direkt die graphische Anschauung thematisieren und somit ein geeignetes Vorgehen nahelegen. Eine mögliche Hypothese hierzu ist, dass gerade die graphischen Anschauungen zur Ableitung bei den Lernenden schwach ausgeprägt sind. Dies würde auch mit den Ergebnissen der in Abschnitt 4.3.1 dargestellten Studien übereinstimmen. Mit Blick auf die sehr schwachen Ergebnisse in Aufgabe 8, in der Funktionsgraphen ihren Ableitungsgraphen zuzuordnen waren, scheint dies zuzutreffen. So lässt sich für Aufgabe 8 mutmaßen, dass die Vorstellung der Ableitung als Steigung nicht explizit vorliegt und auch nicht aktiv zur Anwendung genutzt werden kann. Andererseits wurde in Aufgabe 3a durchaus die Interpretation der Ableitung „als Maß für die Steilheit des Funktionsgraphen an einer Stelle“ ausgewählt. Diese Aussagen zur Interpretation der Ableitung als Steigung zeigen also eine Inkonsistenz, die es genauer zu untersuchen gilt. In der Konsequenz wurde diesem Aspekt im Interview ein höherer Stellenwert eingeräumt.

Anders behandelt Aufgabe 7 mit der durchschnittlichen Steigung einen Begriff des unmittelbaren Vorwissens zum Ableitungsbegriff. Wird dieser auch teils sehr gut beschrieben und mit einer graphischen Darstellung verdeutlicht, so stellt doch, wie schon zuvor erwähnt, niemand einen Differenzenquotienten auf. Der Begriff der Sekantensteigung kommt dagegen durchaus vor. Möglicherweise hielt die Aufforderung den Begriff zu „erklären“ und nicht etwa zu „definieren“ die Teilnehmerinnen und Teilnehmer aber auch davon ab, eher formal zu schreiben. Ein sich anschließendes Interview kann hier Klärung bringen und nicht nur den Begriff des Differenzenquotienten sondern darüber hinaus den Begriff des Differenzialquotienten und die Beziehung dieser beiden Begriffe zu dem des Grenzwerts behandeln.

7.2 Auswertung der Interviews

Zu Beginn werden die Fragen des Interviews vorgestellt, wobei nur einige exemplarisch in ihrem exakten Wortlaut wiedergegeben werden. Die übrigen werden in tabellarischer Form ihrem Sinn nach dargestellt. Für die exakten Formulierungen aller Fragen sei auf den Fragenkatalog zum Interview im Anhang, ab Seite 183 verwiesen.

Weiter sei darauf hingewiesen, dass die Interviewfragen zur Vorbereitung der folgenden Analysen bereits geordnet sind. Zunächst gibt es daher einen Abschnitt zu den Interviewfragen, die auf das prozedurale Wissen der Teilnehmer abzielen. Analog ist der sich anschließende Abschnitt über die Fragen zum konzeptuellen Wissen aufgebaut. In diesen Abschnitten werden Beispielantworten verschiedener Personen angegeben, die Namen tragen wie Anne, Ronja, Jolante, Silke oder Lars. Diese Namen wurden willkürlich vergeben und erlauben selbstverständlich keine Rückschlüsse auf die realen Personen.

Erst im Anschluss, nachdem die Fragen bekannt sind, werden die Antworten je interviewter Person näher untersucht. Die Antworten werden dabei im Kontext der Vorstellungs- und Fähigkeitsprofile der jeweiligen Personen dargestellt.

	F. 1	F. 2	F. 3	F. 4	F. 6	F. 7	F. 8	F. 11	F. 12	F. 13
Anne	1	1	2	0,5	0	1	1	0	1	1
Anja	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0
Camille	1	0	3	0	1	0	0	0	1	0
Carla	1	0	1	0,5	0	0	0	0	0	0
Isabella	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Jantine	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Jolante	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0
Lars	1	1	3	0	1	1	0	0	1	0
Mareike	1	1	3	0,5	0	1	0	0	1	0
Marina	1	1	3	1	0	1	1	0	1	0
Ronja	1	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0
Silke	1	1	3	1	1	1	1	0	2	1

Tabelle 7.2: Richtige Antworten in den Interviews

In Tabelle 7.2 sind die interviewten Schüler mit ihren richtigen Antworten aufgelistet. Dabei gehen jedoch nur Fragen in die Bewertung ein, die sich direkt auf die Differenzialrechnung beziehen (siehe obere Zeile der Tabelle 7.2). Die Fragen Nummer 5, sowie 9 und 10, die sich eher auf das Vorwissen bzw. allenfalls Randaspekte beziehen, wurden daher von der Zählung ausgenommen, was

durch doppelte Linien in Tabelle 7.2 kenntlich gemacht wurde. Die ausgelassenen Fragen werden später für andere Analysen herangezogen. Es verbleiben daher Fragen zu

- den Prozeduren und Vorstellungen, die in den Abschnitten 7.2.1 und 7.2.2 angegeben werden.

Als Erweiterung wurden im Interview gefordert ...

- eine Verallgemeinerung der Vorstellung der Ableitung als Steigung auf die Änderungsrate (Frage 8),
- die Anwendung der Änderungsrate um eine „Trendaussage“ zu treffen (Frage 11),
- das Erkennen der Nicht-Differenzierbarkeitsstelle (Frage 12) und
- eine Begründung für die Eindeutigkeit der Tangente in einem Punkt einer differenzierbaren Funktion (Frage 13).

Der Wortlaut der Fragen findet sich im Fragenkatalog im Anhang, ab Seite 183 und in Auszügen auch in den nächsten Abschnitten.

Eine richtige Antwort wurde in der Regel mit einem Punkt, eine falsche mit null Punkten vermerkt (siehe Tabelle 7.2). Änderungen in der Bewertung gegenüber den ursprünglich erwarteten Antworten wurden für drei Fragen vorgenommen, siehe Tabelle 7.3. Mit den hier vorgenommenen Änderungen wird die Qualität der Antworten der Teilnehmer nach wie vor – auch relativ zueinander – korrekt abgebildet. Als Beispiel dient Frage 6 zum Differenzieren per Grenzwertbildung. Hier ist keine der befragten Personen tatsächlich zur richtigen Lösung gekommen. Die Fehler sind aber in einigen Fällen auf falsches Umformen, Fehler beim Kopfrechnen u.ä. zurückzuführen und liegen somit nicht in der Differenzialrechnung begründet. Um aber dennoch in einem gewissen Umfang mit dieser Frage Fähigkeitsdifferenzen abzubilden wurde das erfolgreiche Aufstellen des Differenzialquotienten wie eine richtige Antwort gewertet.

Weiterhin wird an dieser Stelle darauf verzichtet die Frageteile 3a bis 3c sowie 12a und 12b einzeln aufzulisten. Deshalb sind für diese beiden Fragen bis zu zwei bzw. drei Punkte zu erreichen, statt eines einzelnen Punktes für die richtige Lösung.

Frage	Anforderung	Änderung
3b	Übereinstimmung der Ableitung zweier Funktionen an nur einer Stelle deuten	Die Nennung der übereinstimmenden Steigung an dieser Stelle, oder des gemeinsamen Punktes der Ableitungsfunktionen sollen jeweils einzeln als richtige Antwort zählen.
4	Graphisches Ableiten eines abgebildeten Funktionsgraphen	Es gab keine komplette Lösung. Eine präzise Erklärung des Vorgehens unter Bezug auf die Steigung wurde als korrekt bewertet, eine ziemlich genaue Erklärung in Kombination mit einer teils korrekten Umsetzung ergab ein „halbrichtig.“
6	Ermitteln der Ableitung an einer bestimmten Stelle per Grenzwertbildung	Da es keine vollständig korrekte Antwort gab, wurde der richtig aufgestellte Differenzialquotient als richtig angesehen.

Tabelle 7.3: Änderungen in der Bewertung von Fragen

7.2.1 Fragen und Ergebnisse zum prozeduralen Wissen

Im Interview wurde die korrekte Durchführung der in Abschnitt 4.2.1 genannten drei Prozeduren, symbolisches und graphisches Differenzieren und Differenzieren per Grenzwertbildung erwartet. Abbildung 7.8 zeigt beispielsweise die zwei Interviewfragen zum symbolischen Differenzieren, wobei in beiden Fällen zunächst der von der interviewenden Person gesprochene und darunter in eckigen Klammern der auf dem speziellen Arbeitsblatt abgedruckte Text angegeben ist. Dabei ist um Frage 2 erfolgreich zu bearbeiten auch konzeptuelles Wissen notwendig, was im folgenden noch genauer ausgeführt wird. Weiterhin steigt der Anteil des konzeptuellen Wissens der zur Anwendung der beiden übrigen Prozeduren erforderlich ist. So sind etwa die Vorstellung der Ableitung als Steigung (siehe Frage 4 in Abbildung 6.7) oder die Kenntnis des Zusammenhangs des Ableitungsbegriffs mit dem Begriff des Differenzenquotienten zur erfolgreichen Bearbeitung der Fragen notwendig.

In der folgenden Auflistung werden die Anforderungen der einzelnen Fragen in Kurzform umschrieben (der genaue Wortlaut der Fragen befindet sich im Anhang ab Seite 183).

- symbolisches Differenzieren (Kalkülaspekt)

Anforderung	Frage
symbolisches Differenzieren (einfaches Monom)	1
symbolisches Differenzieren (interpretiert für spez. Stelle)	2
Zwei verschiedene Funktionen, deren zugehörige Ableitungsfunktionen identisch sind, angeben	3a

Zu jeder Prozedur und jeder Frage werden Angaben eher quantitativer Art zur Beantwortung durch die Interviewten gemacht.

Die erste Frage, nach der Ableitung der Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^3$ nach der Variablen x (siehe Abbildung 7.8), erfordert über die Anwendung eines einfachen Algorithmus hinaus keine weiteren Kenntnisse von den Befragten und bildet bewusst den Anfang um einen positiv erlebten Einstieg in das Interview zu ermöglichen.

Tatsächlich haben elf der zwölf Teilnehmer die Funktion richtig mit $f'(x) = 3x^2$ ableiten können und zumeist schriftlich geantwortet. Als typisches Beispiel kann hier die Bearbeitung von Ronja angesehen werden (siehe Abbildung 7.9). Die Antwort von Silke ist dagegen eher als ausführlich zu bezeichnen¹¹:

„Also $f'(x)$ ist ..., die 3 wird vorgezogen, und dann bleibt oben noch die 2.“

Einzig Jantine notiert $f'(x) = 3x^{-2}$ als Antwort und hat die Prozedur offenbar falsch erinnert.

Zur Beantwortung der zweiten Frage (siehe Abbildung 7.8) ist das Ergebnis des symbolischen Differenzierens als Funktion zu interpretieren. Dies gelang nur noch der Hälfte der Teilnehmer, also sechs Personen, die dann zum Ergebnis $g'(x) = 3$ kamen. Ganz richtig erklärt beispielsweise Jolante:

„weil das ein Produkt ist (...) weil das ja sonst ..., also, wenn dann z.B. $g(x)$ jetzt einfach nur 3 wäre, ohne das x , dann wäre das ja 0, die Ableitung. (...) Wenn das (*Fingerzeig von Jolante auf die spezielle Stelle $x = 1$*) auch nicht angegeben ist, dann kommt ja so auch 3 raus.“

¹¹Die im folgenden angegebenen Zitate entsprechen bis auf die Großschreibung von Substantiven und Satzanfängen den Transkripten. Insbesondere werden Pausen weiterhin durch * angegeben. Die verwendete Symbolik findet sich im Anhang ab Seite 183 erklärt.

Weitere fünf Personen kommen auf 0 im Endergebnis. Teils schreiben sie die Antwort ohne erkennbare Gründe für diese Wahl einfach nieder, teils sehen sie sich in einem Konflikt, in dem sie sich entscheiden müssen, ob sie zunächst die Zahl 1 in die Gleichung der Funktion einsetzen und dann ableiten sollen oder umgekehrt zunächst ableiten und danach einsetzen. Schließlich entscheiden sie sich für die erste Wahl und setzen die 1 unmittelbar in die Ausgangsfunktion ein. Diese wird dann als Konstante betrachtet und schematisch abgeleitet. Stellvertretend wird die Argumentation von Camille dargestellt:

„... müsste 3 sein, aber * ja, keine Ahnung, das ist unlogisch, weil x wird ja auch 1, wenn man es ableitet. (...) Aber wenn man 1 einsetzt nicht, dann ist es ja 0. Also von daher ...“

Sie schreibt dann $g'(x) = 0$ auf. Ganz ähnlich lässt sich auch die Antwort von Isabella lesen, die ebenso im Endergebnis auf 0 kommt.

Schließlich bleibt noch Ronja. Sie erhält 1 als Ergebnis, räumt allerdings ein die Frage gar nicht zu verstehen:

„... versteh ich irgendwie ehrlich gesagt nicht, weil ... *(Interviewerin: Also, es geht wieder um die Ableitung, diesmal von dieser Funktion (*zeigt darauf*) und dann, welchen Wert die hat an der Stelle 1 ...) *24* Ich würd das jetzt das jetzt einfach so ableiten. Also, keine Ahnung.“

Die Frage (Frage 3a) nach zwei Funktionsgleichungen, die beim Ableiten auf dieselbe Gleichung für die Ableitungsfunktion führen, lässt sich durch Angabe von zwei beliebigen Funktionsgleichungen, die sich einzig in einer Konstanten unterscheiden, beantworten. Die Ableitungsregeln werden damit in dieser Aufgabe weniger explizit eingefordert, so dass die entscheidende Idee hier auch aus der Anschauung, dass die Steigung der Graphen dieser zwei Funktionen überall identisch sein muss, entstehen kann. Insgesamt waren acht der zwölf Schülerinnen und Schüler in der Lage diese Frage korrekt zu beantworten. Zumeist wurden einfach konstante Funktionen als Antwort angegeben. Dabei zeigten sich deutliche Unterschiede in den Herangehensweisen der Interviewten. Lars etwa sagt:

„... einfach nur um 'ne Konstante verschieben ...“

und gibt damit zu erkennen, dass er von der Vorstellung der Ableitung als Steigung ausgehend zur Lösung findet. Jolante dagegen schreibt:

$$\begin{aligned}
 f(x) &\neq g(x) \\
 f'(x) &= g'(x) \\
 f(x) &= 2x^2 + 3 \\
 f'(x) &= 4x \quad g'(x) = 4x \quad \Rightarrow g(x) = 2x^2
 \end{aligned}$$

Bei ihr zeigt sich daher ganz anders als bei Lars ein sehr formales Vorgehen. Isabella schreibt die in Abbildung 7.10 dargestellten Zeilen und beendet damit die Bearbeitung. Vermutlich nimmt sie also fälschlich an eine richtige Antwort gegeben zu haben. Die übrigen drei Personen führen die Bearbeitung nicht zu Ende.

- graphisches Differenzieren

Anforderung	Frage
Graphen einer Funktion zeichnen, deren Ableitung überall negativ ist	3c
Graphisches Ableiten eines abgebildeten Funktionsgraphen	4

Die Frage 3c ist beantwortet, sobald ein fallender Graph gezeichnet wird. Eine Nachfrage wird dann gestellt, wenn eine besondere Lage des Graphen im Koordinatensystem gewählt wird, z.B. ausschließlich unterhalb der x -Achse. Das entscheidende Argument, dass die Ableitung als Steigung des Funktionsgraphen zu interpretieren sei und dieser Graph somit fallen müsse, wenden insgesamt sechs Personen an, wobei aber nur fünf dies auch tatsächlich umsetzen und ein korrektes Beispiel angeben können. Unter diesen fünf Personen macht beispielsweise Carla ihre Überlegungen recht gut deutlich:

„... und wenn die Ableitung negativ ist, dann ist ja die Steigung dieser Funktion * negativ. * Das heißt sie geht in den Minusbereich, das heißt sie geht nach unten. ** Das heißt * ja die Funktion müsste eigentlich immer nach unten gehen,* irgendwie (I: mhm!). ** Ob das 'ne Gerade ist oder 'ne Welle, weiß ich jetzt nicht, oder was auch immer. Jedenfalls * also, ich würde sagen, die geht auf jeden Fall immer irgendwie nach unten. *5*“

Auch Lars argumentiert, gleich nachdem die Frage fertig gestellt ist, mit der Steigung:

„Ok, das heißt, ähm * die Steigung ist dann *3*, müsste dann eigentlich fallend sein, oder? *(Er zeichnet dann den Graphen zu $f(x) = x$ im dritten Quadranten ein und deutet die fallende Steigung von rechts nach links an)* ... aber ich würd sagen, dass das ein fallender Graph ist, der quasi hier so runter geht.“

Die übrigen sechs Teilnehmerinnen versuchen sich entweder gar nicht erst an der Fragestellung, machen nicht nachvollziehbare Vorschläge oder legen sich auf einen bestimmten Quadranten des Koordinatensystems fest, in den sie mehrere falsche wie richtige Beispiele einzeichnen. Teils zeigen die Antworten unerwartete Defizite, z.B. wenn es gilt den Ausdruck „negative Werte“ zu verstehen.

Das graphische Differenzieren wird auf einem Arbeitsblatt verlangt, auf dem in der oberen Hälfte ein Koordinatensystem mit einem Graphen abgebildet ist, darunter ein freies Koordinatensystem im selben Maßstab (siehe Abbildung 7.11). Der Graph beinhaltet ein Maximum, ein Minimum, eine Nullstelle und ein Geradenstück als markante Punkte bzw. Abschnitte. Als Ableitungsgraph genügt eine Skizze, die erkennen lässt, dass die Steigung in den Extrempunkten jeweils 0 beträgt und dem Geradenstück eine Konstante als Ableitung zugewiesen wird den Anforderungen. Dazwischen können Tendenzen angegeben werden.

Den interviewten Schülerinnen und Schülern bereitet dieser Arbeitsauftrag sichtlich Schwierigkeiten. So haben fünf von ihnen gar nicht erst begonnen etwas in das freie Koordinatensystem einzuzeichnen bzw. gleich wieder aufgegeben. Teils geben sie als Grund an, dass sie ohne Formeln nichts tun könnten, so auch Jantine:

„...ich hab echt, ich kann mir dadrunter echt nichts vorstellen. Gar nichts. *4* Ich kann's ja noch nicht mal rechnen. *2* also wenn ich 's rechnen könnte, wenn ich irgendwas in eine Formel einsetzen könnte. (I: hm) Aber ich kann mir darunter leider ja überhaupt nichts vorstellen. *3*“

Unter den übrigen sieben Bearbeitungen leiten Silke und Marina die angegebene Funktion an einigen Stellen und Abschnitten richtig ab. Marina etwa zeichnet als Ableitung des Geradenstücks eine Konstante in das untere Koordinatensystem (siehe Abbildung 7.11). Während sie zeichnen, erklären die beiden Schülerinnen recht ausführlich, wie sich die Steigung in den zuvor genannten, markanten Bereichen verhält. Folgender Ausschnitt ist der Erklärung entnommen, die Marina gibt:

„...okay, also bis hierhin, bis zum Punkt -2 , ähm, ** steigt die Funktion zwar, aber sie steigt anfangs größer, also mit größeren Werten als später. (...) Und da geht's hoch, aber ab diesem Punkt steigt sie mehr an, ** (...) *5* so, und dann hab ich ja hier die konstante Steigung.“

Marinas Erklärung kann als zutreffend bewertet werden. Dies gilt auch für Silkes Erklärung. Die Umsetzung gelingt bei beiden allerdings nur teilweise (siehe Abbildung 7.11). Carla gibt eine weitgehend richtige Erklärung, hat am Ende aber statt des Ableitungsgraphen den Ausgangsgraphen annähernd reproduziert. Mareike, Ronja und Anne erstellen dagegen Ableitungsgraphen, die richtige Anteile enthalten, ohne ihr Vorgehen jedoch zu erklären bzw. mit Erklärungen die, wie bei Anne, diffus bleiben:

„Also, es ist auf jeden Fall so, dass an den Punkten, an denen hier (*oben, in der Originalfunktion*) was passiert, da (*unten, in der Ableitungsfunktion*) auch was passiert sozusagen.“

Jolante schließlich scheint das Ableiten als eine Spiegelung aufzufassen, wenn sie erklärt:

„Ok, ich würd' vielleicht genau als Umkehr ... , also genau umgekehrt alles machen (*mitschwingende Handbewegung deutet Spiegelung an x-Achse an*). Aber das is glaub ich falsch, aber ich wüsste nicht, wieso ich jetzt drauf komm ...“

- Ableiten per Grenzwertbildung

Anforderung	Frage
Die Ableitung an einer bestimmten Stelle wird über den Prozess der Grenzwertbildung ermittelt.	6

Als abschließende Prozedur zur Bestimmung der Ableitung, ist nach der Berechnung per Grenzwertbildung gefragt. Die Ableitung der Funktion mit der Vorschrift $f(x) = x^4$ ist dazu an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ zu bestimmen. Dafür ist der Differenzenquotient aufzustellen, dann der Grenzwert zu bilden und das Ergebnis auf die Stelle $x = \frac{1}{2}$ anzuwenden. Der aufzustellende Grenzwert kann in der Form $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ geschrieben werden oder auch als $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Die auf dem Aufgabenblatt angegebene Hilfe (siehe die Interviewfragen im Anhang ab Seite 183, Frage 6) bezieht sich dabei

auf die Wahl des zuletzt genannten Weges, der oft auch als h -Methode bezeichnet wird. Bei der Konzeption des Interviews wurde davon ausgegangen, dass die Befragten die h -Methode zur Berechnung deutlich bevorzugen würden, nachdem im Leistungstest in Aufgabe 6 die Wahl zwischen den zwei Varianten bestanden hatte und sich die Teilnehmer ausnahmslos alle für die h -Methode entschieden hatten.

Tatsächlich gelang es keiner der interviewten Personen die Berechnung erfolgreich zu Ende zu führen. Bei genauerer Betrachtung der Bearbeitungen, zeigte sich, dass insgesamt nur drei Personen fähig waren den Grenzwert des Differenzenquotienten in seiner allgemeinen Form korrekt zu notieren. Zudem zeigen auch Mareike, der ein Vorzeichenfehler unterläuft, und Lars, der das Limes-Symbol nicht angegeben hat, sinnvolle Ansätze. Beispielsweise sagt Lars:

„... und den Differenzialquotient muss ich dann noch, also * ähm den Grenzwert, von äh beiden Seiten halt noch bestimmen und den Wert, den ich dann rausgekriegt hab', ergibt den Term,...“

Lars verrechnet sich, nachdem er die Variablen voreilig ersetzt hat. Auch Camille ersetzt x_0 gleich und schreibt schließlich $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^4 - \frac{1}{16}}{x - \frac{1}{2}} = 0$. Auf die Frage, warum sie so schnell zur 0 gelangt ist, antwortet sie mit:

„Ja, weil des gleich is,... (I: ach so) wenn wir hier $\frac{1}{2}$ für x einsetzen.“

Allem Anschein nach erfasst Camille in dieser Szene den Prozesscharakter des Grenzwerts nicht sondern sieht lediglich das Kalkül.

Insgesamt betrachtet bedürfen die dargestellten Prozeduren der angegebenen Reihenfolge nach zur Anwendung immer höherer Anteile konzeptuellen Wissens. Aber auch die Prozeduren selbst lassen sich als zunehmend aufwendiger beschreiben. Insofern ist also die in der angegebenen Reihenfolge der Prozeduren abnehmende Lösungsrate durchaus erwartungskonform zu nennen. Bemerkenswert sind allerdings zwei Befunde, die nicht so recht zueinander passen. So zeigt sich im Vergleich der Fragen 1 und 2 zum symbolischen Differenzieren (siehe Abbildung 7.8) ein sehr deutliches Absinken der Lösungsraten. Konnten noch elf der zwölf Teilnehmer die erste Frage richtig beantworten, so waren es bei Frage 2 noch sechs der zwölf Personen. Der neue Aspekt in Frage 2 bezieht sich auf die Interpretation der Ableitung als Steigung, was jedoch im Zusammenhang mit den Fragen 3a und 3c von den Teilnehmern im allgemeinen geleistet werden konnte. Diese zur Beantwortung von Frage 2 ebenfalls hilfreiche Vorstellung sollte demnach durchaus vorliegen. Der zweite bemerkenswerte

Befund betrifft Frage 4 (siehe Abbildung 7.11), denn beim graphischen Differenzieren scheinen im Gegensatz zu den Ergebnissen verschiedener, früherer Studien (siehe Abschnitt 4.3.1) eher die Prozeduren für Schwierigkeiten verantwortlich zu sein. Wie bereits weiter oben bei Frage 4 beschrieben, gelingt es einigen Teilnehmern, die die Situation korrekt beschreiben können doch nicht einen (annähernd) richtigen Graphen der Ableitungsfunktion zu zeichnen. Auch im Zusammenhang mit der Frage 6 entsteht der Eindruck, dass Schwierigkeiten nicht im konzeptuellen Wissen begründet liegen sondern in elementaren Umformungen und der Anwendung von Formeln. D.h. allgemein hat somit das mangelnde, prozedurale Wissen einen bedeutsamen Anteil am Misslingen der Grenzwertbildung. Um genauere Aussagen treffen zu können, wird nun der Blick auf die Vorstellungen hilfreich.

7.2.2 Fragen und Beispiele zum konzeptuellen Wissen

Neben den zentralen Anschauungen, die die Ableitung als Steigung und als Grenzwert erfassen, wurden im Interview auch die Vorstellungen der Ableitung als Änderungsrate und der Aspekt der „local straightness“ betrachtet. Die Gewichtung der einzelnen Aspekte im Interview geht mit der Schwerpunktsetzung in der Schule konform, so dass speziell die Interpretation der Ableitung als Steigung im Funktionsgraphen bzw. als Steigung der Tangente besonders thematisiert werden.

Weiter sei angemerkt, dass auch die unter dem vorangegangenen Abschnitt betrachteten Fragen Gelegenheit bieten, Vorstellungen und Anschauungen zu äußern. Überhaupt zeigt sich hier das schon weiter vorn in dieser Arbeit angesprochene Problem, das konzeptuelles Wissen sich kaum messen lässt und zudem in der Praxis nur schwer vom prozeduralen Wissen abzutrennen ist (siehe Abschnitte 3.1.3 und 3.2.5). In vielen Leistungsmessungen steht üblicherweise im Vordergrund ein rechnerisches Ergebnis zu erhalten. Auch dieses Interview beinhaltet solche Teile, wie in Abschnitt 7.2.1 dargestellt. Derartige Aufgaben und Fragestellungen bieten dennoch Gelegenheit Vorstellungen explizit zu machen. Im Vergleich zum prozeduralen Wissen gilt das konzeptuelle Wissen als eher abstraktes, vom spezifischen Kontext unabhängiges bzw. generalisierbares Wissen. Folglich unterscheiden sich die Schülerinnen und Schüler darin, bei welchen Fragen sie die Gelegenheit genutzt haben beispielsweise ihr Verständnis der Ableitung als Tangentensteigung preiszugeben. Demnach ist es wenig sinnvoll die Antworten Frage für Frage in der Art darzustellen, wie es für den Bereich des prozeduralen Wissens im vorangegangenen Abschnitt 7.2.1 getan wurde. Wichtige Aspekte zu den Vorstellungen werden jedoch später aufgegriffen und ausgeführt, indem im Abschnitt 7.3 die Vorstellungen personenbezogen im Zusammenhang präsentiert werden. Schließlich handelt es sich

beim konzeptuellen Wissen, wie in Abschnitt 3.1.1 beschrieben, um ein Wissen, das wesentlich durch seine Beziehungshaltigkeit bestimmt wird.

Um die Darstellungen aus dem Abschnitt 7.2.1 zudem nicht in weiten Teilen zu wiederholen, werden hier also exemplarisch nur einzelne Fragen der Sets näher betrachtet.

Als Vorstellungen werden im Interview die Ableitung als Steigung, als Grenzwert, als Änderungsrate und daneben der Aspekt der „local straightness“ thematisiert:

- die Ableitung als Steigung

Anforderung	Frage
Zwei verschiedene Funktionen, deren zugehörige Ableitungsfunktionen identisch sind, angeben	3a
Übereinstimmung der Ableitung zweier Funktionen an nur einer Stelle deuten	3b
Graph einer Funktion zeichnen, deren Ableitung überall negativ ist	3c
Graphisches Ableiten eines abgebildeten Funktionsgraphen	4
Beschreibung der Steigungsbestimmung in einem Punkt ausgehend von der Sekantensteigung	7
Argumentation: Eindeutigkeit der Tangente aufgrund der eindeutigen Ableitung	13

Die erstgenannte Frage wurde bereits im Abschnitt 7.2.1 behandelt. Die Interviewteilnehmer zeigten dabei eher selten, dass sie zur Beantwortung eine bildliche Vorstellung heranzogen. Eine Ausnahme bildet in diesem Sinne neben dem zuvor genannten Lars („... einfach nur um 'ne Konstante verschieben ...“) Marina, die die lineare Gleichung aus der vorangegangenen Frage weiter verwenden möchte und nun noch eine passende zweite sucht und dabei eine klare graphische Vorstellung äußert:

„Also, die erste Ableitung * gibt ja die Steigung der Ausgangsfunktion an. *5* Das heißt, * ähmm * ich brauche 'ne Funktion, * die konstant steigt. “

Es schließt sich im Interview die Frage an, was es bedeutet, wenn zwei verschiedene Funktionen, an nur einer einzigen Stelle denselben Ableitungswert haben. Als zutreffende Gemeinsamkeiten sind hier der gemeinsame Punkt der Ableitungsfunktionen und natürlich die gleiche Steigung der Ausgangsfunktionen an der betreffenden Stelle zu nennen. Auf die Ableitung als Steigung ist beispielsweise Carla eingegangen:

„Eine Ableitung ist ja praktisch die Steigung von der Funktion,
* von, die, die abgeleitet wird.“

- die Ableitung als Grenzwert

Anforderung	Frage
Ermitteln der Ableitung an einer bestimmten Stelle per Grenzwertbildung	6
Beschreibung der Steigungsbestimmung in einem Punkt ausgehend von der Sekantensteigung	7
Erkenntnis: Grenzwert beider Seiten muss identisch sein.	12

Während in Frage 6 die Prozedur im Vordergrund steht, zielt Frage 7 auf die konzeptuellen Hintergründe ab und bietet dazu als Ansatzpunkt eine Skizze, in der eine Sekante in einen Graphen eingezeichnet ist (siehe Abbildung 7.12). Diese zwei Fragen werden bewusst nacheinander gestellt und als zwei unterschiedliche Fragen behandelt, um möglichst zwischen einer verbalen Beschreibung der eben durchgeführten Prozedur und den zugrunde liegenden Vorstellungen des Grenzprozesses trennen zu können. Tatsächlich wichen die Interviewten in Frage 6 häufiger auf das Erklären der Prozedur aus, wenn sie mit der Berechnung keinen Erfolg hatten. Wie zuvor in Abschnitt 7.2.1 dargestellt, hat niemand die Ableitung über die Bildung des Grenzwerts vollständig ausrechnen können.

Exemplarisch wird hier nun ein Beispiel für Aussagen zum Grenzwert in Frage 7 angegeben. In dieser Frage sollte erklärt werden, wie von der angegebenen Sekante durch die zwei Punkte P und Q zu einem Wert für die Steigung in Punkt P zu gelangen ist. Abbildung 7.12 gibt dabei die genaue Fragestellung wieder, wie sie sowohl mündlich formuliert als auch schriftlich auf dem Arbeitsblatt angegeben wurde. Ihre Vorstellung zur Steigungsbestimmung in einem Punkt beschreibt Carla beispielsweise so:

„...weil ein Punkt an sich hat ja eigentlich keine Steigung, also das ist ja schon ein bisschen, klein bisschen mehr...“

In der Vorstellung von Carla ist jede messbare Steigung also die Steigung einer Sekanten. Eine wirklich punktuelle Steigung gibt es nicht. Der Grenzwert bleibt das (unerreichte) Ziel einer unendlichen Annäherung. Bei Anne ist die Sichtweise eine andere:

„Ja, indem man eben diesen Abstand immer kleiner werden lässt und dann eben ** aus Q dann ... ähm Q gegen 0 laufen

lässt, also den Punkt Q und dann ähm wird ja die Sekante kleiner sozusagen und dann hat man irgendwann nur noch einen Punkt und das ist dann die Steigung im Punkt P . ** “

Hier darf sicherlich unterstellt werden, dass nicht der Punkt Q zu 0 wird sondern der Abstand zwischen den Punkten P und Q . Entscheidend ist jedoch, dass aus der Sicht von Anne die Steigung in einem Punkt tatsächlich existiert und erreicht wird.

- die Ableitung als Änderungsrate

Anforderung	Frage
Die Änderungsrate als anderer Begriff für die Ableitung ist zu erklären. Welche Änderungen sind es, die diesen Namen rechtfertigen?	8
Erkenntnis, dass die Ableitung als Änderungsrate die Entwicklung der Funktionswerte angibt	11

Zu beiden Fragen bzw. zum Begriff der Änderungsrate vermochten die Interviewten sehr wenig zu sagen. Vergleichsweise ausführlich äußert sich Silke:

„Vielleicht, also weil die Steigung beschreibt ja sozusagen auch wie der Graph verläuft. Also, hier . . . , wenn er sich zum Beispiel so biegt (*zeichnet schwungvoll einen Graphen in die Luft*) und die Änderung so von dem Verlauf von dem Graphen vielleicht, und wie stark er sich da ändert, und wie schnell. ...“

In diesem Ausschnitt lässt sich immerhin eine Idee der Änderungsrate erkennen, die in ähnlicher Weise ebenfalls von Marina und Anne formuliert wird (siehe den noch folgenden Abschnitt 7.3).

- der Aspekt der „local straightness“

Vorstellungen werden geäußert, wie sich in einer beliebig kleinen Umgebung eines Punktes P , der zum Graphen einer differenzierbaren Funktion gehört und in dem die Steigung 0 beträgt, die Steigung verhält (Frage 5).

Zu dieser Frage gibt beispielsweise Mareike eine klare Vorstellung preis:

„Ich glaube von P erscheint es dann so, dass die anderen Punkte drumherum auch 0 sein sollten, weil soweit ich weiß, schneiden sie die ** die erste Achse nicht, sondern verlaufen so ganz dicht an der x -Achse vorbei.“

Auch wenn sich Mareike bei ihren Ausführungen auf den konkreten, von ihr skizzierten Fall beschränkt, zeigt sich doch die Nähe dieser Vorstellung der local straightness zum Grenzwert, wie bereits in Abschnitt 4.2.1 angesprochen.

7.2.3 Ergebnisse zu Formelsprache und Symbolen

Einige Fragen des Interviews erforderten von den Befragten in besonderem Maße die Kenntnis der mathematischen Formelsprache und Symbole. Zu diesen Fragen zählen allen voran die Fragen 6 und 10. In der erstgenannten ist der Differenzialquotient aufzustellen, wobei gerade das Symbol $\lim_{x \rightarrow x_0}$ bzw. $\lim_{h \rightarrow 0}$ zu verwenden und zu verstehen sind. In Frage 10 gilt es ein Beispiel zu finden und graphisch darzustellen, dass der Bedingung $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ genügt.

Als weiteres soll in diesem Abschnitt aber auch Frage 2 genauer betrachtet werden, obwohl sie auf den ersten Blick keine großen Anforderungen an die formalen Kenntnisse zu stellen scheint. Sie fragt das symbolische Differenzieren einer Funktion mit der Gleichung $g(x) = 3x$ ab und das Anwenden dieser Ableitungsfunktion auf die Stelle $x = 1$. Sie kann jedoch in einigen Fällen zeigen, dass die Schreibweise der Funktionsgleichung nicht verstanden wurde und damit der Funktionsbegriff selbst bzw. die Bedeutung der Variablen x nicht. Schon die in Abschnitt 7.2.1 unter dem Punkt des symbolischen Differenzierens dargestellten Ergebnisse zeigen, dass Frage 2 gegenüber Frage 1 weniger häufig korrekt beantwortet wurde. Wenn auch einzelne Personen die Ableitung richtig mit dem Wert 3 angegeben haben, so kommen doch einige, die mit Frage 1 keinerlei Schwierigkeiten hatten, hier zu gar keinem oder einem falschen Ergebnis. Zu diesen Personen zählt auch Camille:

„(. . .) müsste 3 sein, aber * ja, keine Ahnung, das is unlogisch, weil x wird ja auch 1, wenn man's ableitet.*“

Offensichtlich weiß Camille nicht, was es bedeutet zunächst abzuleiten und 1 dann in die Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion einzusetzen.

Ähnlich ergeht es Jantine, die zwei Mal die Rechnung ansetzt, wobei sie nur einmal das x ersetzt. Aus dem Mapping-Teil des Interviews wird offensichtlich, dass sie den Unterschied zwischen der Ableitung in einem Punkt und der Ableitungsfunktion nicht erfasst hat:

„... (legt Karte Ableitungsfunktion näher an Ableitung in einem Punkt) *6* Wo ist da der Unterschied?“

Ohne die Unterscheidung zwischen diesen Begriffen kann sie zwar verstehen, dass x durch 1 zu ersetzen ist, aber nicht die Bedeutung dessen erfassen. In Frage 6 zeigt sich bei Camille und wiederum Jantine, dass sie das Symbol $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}}$ bzw. $\lim_{x \rightarrow x_0}$ missverstehen, indem sie den Pfeil wie ein Gleichheitszeichen behandeln. Jantine:

„Vielleicht nachdem x hier gegen x_0 läuft und ich x_0 habe, könnte ich ja das x in x_0 einsetzen.“

Frage 10 schließlich dreht sich um den Differenzenquotienten. An den Antworten der Befragten fällt auf, dass sie ihn in aller Regel nicht in der Formel $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ wiedererkennen. Bis auf Silke erkennt auch niemand, dass die Bedingung für diese Gleichung ein Zähler vom Wert 0 ist. Camille ist in dem Sinne typisch als sie die Differenzen in der Formel nicht erfasst:

„Ja, dann is' se wieder waagerecht. ** (I: mhm) Also, die Tangenten an den Stellen a und b sind wieder waagerecht. **“

Dabei erkennt Camille immerhin, dass es sich bei a und b um Stellenbezeichnungen handelt, im Gegensatz zu Carla:

„Naja, also, ich mein', wenn a und b irgendwelche beliebigen Punkte auf dem Graphen sind, ...“

Sogar den leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern (siehe Abschnitt 7.3 und dort insbesondere Abbildung 7.13), wie etwa Marina unterläuft dieser Fehler. Die Fehl- oder Nicht-Deutung der Formel des Differenzenquotienten liegt daher möglicherweise zum Teil in diesem Stelle-Punkt-Konflikt begründet. Eine andere mögliche Ursache ist das fehlende Verständnis für den alltagssprachlichen Begriff der durchschnittlichen Steigung. Neben Jantine, die einer Parallelen zur x -Achse abspricht eine Durchschnittssteigung von 0 zu haben („Sonst wär's ja absolut 0.“) hat auch Lars hier Probleme: „Das heißt *größtenteils 0, aber ab und zu auch mal 10.000 oder so.“

7.2.4 Ergebnisse zu den Begriffen des Vorwissens

Als unverzichtbare Vorwissensbegriffe des Ableitungsbegriffs werden in diesem Interview die Tangente, der Differenzenquotient, die durchschnittliche Steigung und das Steigungsdreieck thematisiert. Die letzten drei werden einzeln aufgeführt, da die durchschnittliche Steigung als konkret-graphische Anschauung, das Steigungsdreieck mit dem stark prozeduralen Aspekt und der eher

abstrakte und formale Differenzenquotient sich in den unterschiedlichen Repräsentationen bedeutsam unterscheiden.

Dennoch wurden die Begriffe des Vorwissens zugunsten zentraler Begriffe der Differenzialrechnung, nur am Rande thematisiert, so dass schließlich für den Bereich des Vorwissens in erster Linie defizitäres Begriffswissen zutage treten kann. Einige Befunde, die sich hier wiederum einordnen lassen, finden sich bereits unter dem obigen Abschnitt 7.2.3 zu den Schwierigkeiten mit der Formelsprache: Der fehlende Begriff des Durchschnitts bzw. der durchschnittlichen Steigung wirkt sich, da er die Anschauungsebene repräsentiert, bis auf den Begriff des Differenzenquotienten aus.

Der Tangentenbegriff ist zumindest als naiver, d.h. nicht auf der Ableitung als Steigung der Tangente basierender, Begriff bei allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern bis auf eventuell Ronja vorhanden: „Können Sie mir das Wort Tangente noch mal erklären?“ Hier ist nicht zu erkennen, ob Ronja tatsächlich der Begriff der Tangente fehlt oder lediglich der Begriffsname (siehe Abschnitt 1.1.1). Aber auch im letzteren Fall ist die Verständigung über den Tangentenbegriff und den Zusammenhang zum Ableitungsbegriff kaum möglich.

Zudem zeigen sich in den Schülerantworten auch einige Probleme im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff, der in der Liste der Vorwissensbegriffe hier gar nicht vorgesehen war. So werden dem Funktionsbegriff in einem Fall etwa „Ränder“ zugesprochen, in dem Sinne, dass Funktionen per se nur beschränkt auf abgeschlossenen Intervallen definiert sind (siehe Jantines Profil im Abschnitt 7.3.4).

Weiterhin ist als zusätzliches Hindernis der ebenfalls oben beschriebene Stelle-Punkt-Konflikt zu nennen.

Die Beispiele lassen sich fortführen und betreffen dabei nicht nur die leistungsschwächeren Schüler. Gerade die zwei letztgenannten Defizite im Vorwissen sind durchaus verbreitet.

7.3 Profile der Interviewten

7.3.1 Feststellung von Leistungsgruppen

Zunächst kann Tabelle 7.2 (auf Seite 98) als Vorarbeit für diesen Abschnitt angesehen werden. Denn sie wurde zur Leistungsbeurteilung der interviewten Personen herangezogen.

Nach der Auszählung der korrekt beantworteten Fragen (siehe Tabelle 7.2) ergibt sich die in Abbildung 7.13 dargestellte Verteilung. Daneben finden sich

in der Abbildung bereits die drei Leistungsgruppen, die selbstverständlich nicht willkürlich gewählt wurden und inhaltlich noch genauer beschrieben werden.

Abbildung 7.14 gibt dazu zunächst einen Überblick.

Links in der Abbildung sind die Namen der Befragten nach der Anzahl richtiger Antworten angegeben. In den Spalten findet sich aus Gründen der Übersichtlichkeit nur noch eine reduzierte Anzahl von Fragen: Auf Fragen, die von praktisch allen Teilnehmern richtig beantwortet wurden, wie Frage 1 wird genauso verzichtet, wie auf solche, die von keiner Person beantwortet werden konnten (Fragen 6 und 11). Weiterhin werden Fragen, wie etwa Frage 8 (oder Frage 6 nach geändertem Bewertungsmodus) zur Änderungsrate hier ebenfalls ausgeklammert werden. Diese Items fragen lediglich einen Begriff bzw. eine Vorstellung ab und werden innerhalb der noch folgenden Betrachtungen der Leistungsgruppen im Zusammenhang mit weiteren Vorstellungen noch genauer untersucht. Die Fragen 3a bis 4 werden als direkte Anwendungen der Interpretation der Ableitung als Steigung zusammengefasst, wobei jedes Kreuzchen für eine richtige Antwort steht, jedes eingeklammerte Kreuzchen für einen guten Ansatz beim graphischen Differenzieren in Frage 4 bzw. im Fall von Camille eine fast richtige Antwort auf Frage 13. Auf Camille und auch auf Silke wird noch besonders eingegangen, da sie in einigen Punkten bessere Leistungen zeigen als die übrigen Personen der jeweiligen Gruppe.

Der Abbildung 7.14 kann entnommen werden, dass von Leistungsgruppe 1 zu 2 eine Tendenz besteht die Fragen 2 und 7 nicht mehr richtig beantworten zu können. Zudem sinkt die Rate der richtigen Antworten auf die Fragen 3a bis 4, die direkten Anwendungen der Ableitung als Steigung. Im Unterschied zur zweiten tendiert die Erfolgsrate der dritten Leistungsgruppe für ebendiese Fragen 3a bis 4 sogar gegen null. Um Gründe dafür zu finden werden die Leistungsgruppen genauer in den Blick genommen. Zu Beginn der Beschreibungen der Leistungsgruppen werden jeweils die Gemeinsamkeiten der genannten Personen in einer Art Gruppen-Profil vorgestellt, bevor dann die Profile der einzelnen Personen dieser Gruppe Belege dafür liefern. Insbesondere spielen die Vorstellungen zum Ableitungsbegriff in den nächsten Abschnitten eine tragende Rolle. Personenspezifika finden in den im Anschluss dargestellten Profilen der Einzelpersonen Berücksichtigung.

7.3.2 Leistungsgruppe 1: „Ich mach’ es erst einmal graphisch.“

Die Personen, die zu dieser leistungsstärksten Gruppe zählen, verfügen über ein reichhaltiges Netz an Vorstellungen, siehe Tabelle 7.4. Zu dieser Tabelle sei angemerkt, dass durch ein Kreuz jeweils die explizit genannten Interpre-

tationen markiert werden. Das bedeutet, dass darüber hinaus weitere Begriffe bei den Befragten zumindest vage vorhanden sein können. Die Trennlinie zwischen den Spalten „Steigungsdreieck“ und „momentane Steigung“ markiert die Grenze zwischen den Begriffen des Vorwissens und den unmittelbaren Interpretationen der Ableitung.

Während sich anhand der genannten Tabelle 7.4 die geäußerten Vorstellungen quantitativ über verschiedene Fragen hinweg erfassen lassen, zeigt sich etwa in den Bearbeitungen der Frage 7 (siehe Abbildung 7.12) die Vernetztheit der Vorstellungen (für ein Beispiel siehe das folgende Profil von Lars in diesem Abschnitt). Insbesondere ist dort erkennbar, dass der Begriff des Grenzwerts gut in das Begriffsnetz eingebunden ist. Insgesamt dominiert jedoch deutlich der Steigungsbegriff. Silke, Marina und Anne (ebenfalls noch in diesem Abschnitt) verfügen zudem über eine treffende Idee der Änderungsrate.

Name	Differenzenquotient	Steigungsdreieck	momentane Steigung	Tangentensteigung	Grenzwert	Änderungsrate
Silke	x	x	x	x	x	x
Marina	-	x	x	x	x	x
Anne	x	x	x	x	x	x
Lars	x	x	x	x	x	-
Mareike	-	x	x	x	x	-

Tabelle 7.4: Übersicht zum konzeptuellen Wissen der Interviewten aus Leistungsgruppe 1

Beim Verstehen und Umgehen mit formaler Schreibweise werden keine Probleme offenbar. Insbesondere Silke erweist sich als sicher im Umgang mit Formalia. Die Personen dieser Gruppe haben allgemein ein gutes Vorwissen zum Differenzenquotienten bzw. zur durchschnittlichen Steigung. Defizite beim Funktionsbegriff kommen jedoch gelegentlich vor (siehe das Profil von Anne, die mit der abschnittsweise definierten Funktion Probleme hat).

Speziell bei Marina und Silke zeigt sich an einigen Stellen ihre Fähigkeit die Perspektive zu wechseln und von einem graphischen Ansatz auf einen rechnerischen überzugehen.

Das Profil von Silke

Silke beantwortet fast alle Fragen des Interviews korrekt, siehe Abbildung 7.14. Im Gegensatz zu allen weiteren Befragten erkennt sie bei Frage 12 die Nicht-Differenzierbarkeit des Graphen an einer Stelle.

Interessant ist nun die Frage, welches Wissen sich hinter diesen Antworten ausmachen lässt. Zunächst verfügt Silke über die Deutung der Ableitung in einem Punkt als momentane Steigung. Diese Vorstellung bringt sie in den verschiedenen Anwendungskontexten immer wieder ein, beispielsweise gleich in der Antwort auf Frage 2:

„g * also $g(x)$ ist eine Gerade und die hat immer die gleiche Steigung, ** und das ist immer dann die Konstante 3. **“

Noch etwas fällt an der Antwort auf die Frage 2 auf, bei der lediglich nach der Ableitungsfunktion zu einer angegebenen Funktionsgleichung gefragt war, die es dann für eine bestimmte Stelle zu interpretieren galt. Silke wechselt gleich von der angegebenen Funktionsgleichung auf die graphische Repräsentation und argumentiert auf dieser Ebene. Der Wechsel der Repräsentationen lässt sich im Interview immer wieder beobachten. So ist Silke auch die einzige, die sich zu Frage 11 eine Skizze anfertigt. Bei dieser Frage, bei der es darum geht die Ableitung in einem Punkt zu nutzen um Trendaussagen für den Verlauf des Graphen in der Nähe des Punktes zu entwickeln, übersetzt Silke jede der Angaben in eine graphische Form und vergleicht diese miteinander:

„Okay! Also! ** An der Stelle 3 halten wir uns also auf. *13*(*zeichnet Koordinatensystem*) Da ist die 3, so. ** Und die Ableitung davon ist 2. ** Mmmh! (...) Also an der Stelle 3,01, also ganz dicht daneben soll's 3 haben ** nee, entspricht es der ... also ist es auch 5. Also denkt er sich, dass das eine Parallele ist ** (...) Das da oben muss also irgendwie so liegen (*deutet auf Skizze*) ** oder zumindest in dem Punkt, an der Stelle irgendwie * parallel zu dem sein, also verlaufen! ** Und beim zweiten ** ähm (...) glaubt er * oder sie *, dass der Graph *9* steigt, *4* ja, hier. ** Danach (*bei der dritten Variante*) steigt er irgendwie auch, aber eben weniger. *11*“

Auf ihre Skizze greift Silke bei ihren Überlegungen also immer wieder zurück. Ein weiterer Punkt, der in diesem Interview besonders auffällt, ist die formale Sicherheit, mit der die Befragte an die Bearbeitung herangeht. Bei Frage 3a etwa notiert sie die Bedingungen in formaler Art und erreicht Schritt für Schritt

die Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \\ f(x) &= x^2 & f'(x) &= 2x^1 \\ f(x) &= 6 & g(x) &= 3 \\ f'(x) &= 0 = g'(x) = 0 \end{aligned}$$

Das Verständnis für die formale Schreibweise zeigt Silke auch bei der Bearbeitung der Fragen 6 und 12a, da sie in der Lage ist die Formeln für den Differenzialquotienten und für das Steigungsdreieck richtig zu rekonstruieren. Wie aus Tabelle 7.4 zu entnehmen, ist Silke eine der drei Personen, die im Interview spontan einen geeigneten Begriff der Änderungsrate entwickeln. Das entsprechende Zitat: „Vielleicht, also weil die Steigung beschreibt ja sozusagen auch wie der Graph verläuft...“ findet sich bereits im Abschnitt 7.2.2 unter der „Ableitung als Änderungsrate“.

Das Profil von Marina

Bei Marina zeigt sich wie auch bei Silke die Vorstellung der Ableitung als Steigung in vielen Antworten, so z.B. auch in der schon im Abschnitt 7.2.2 unter dem Punkt „Ableitung als Steigung“ angegebenen Aussage zu Frage 3a:

„Also, die erste Ableitung * gibt ja die Steigung der Ausgangsfunktion an (...) *5* Das heißt, * ähmm * ich brauche 'ne Funktion, * die konstant steigt. *7* Das heißt es kann keine sein, die ähm, also keine quadratische Funktion sein. ... weil, die würde nicht konstant steigen. Also muss es 'ne lineare Funktion sein * hmm! Na gut.“

Auch bei Marina steht die graphische Sicht zumeist im Vordergrund. Sie zeigt darüber hinaus besonders deutlich, dass sie die verschiedenen Repräsentationsformen, insbesondere Funktionsgleichungen und Graphen, stark miteinander vernetzt. Stärker als im eben angegebenen Zitat, tritt dies in Frage 3c heraus, zu deren Beantwortung der Graph einer Funktion zu zeichnen ist, deren Ableitung überall negative Werte hat:

„(...) Aber die Ableitung muss ja überall negativ sein. (I: mhm) *17* Ich probier's nicht graphisch, ich probier's erstmal rechnerisch. *5* Negative Ableitung (*siehe AB*). Könnte es ja z.B. sein: minus x hoch 2. Das müsste ja dann eigentlich negativ sein. ** Obwohl, wenn ich ... (*siehe AB*) so ... Das ist ja dann die Ableitung von minus x zum Quadrat (*hat $f'(x) = -2x$ geschrieben*). Minus x

zum Quadrat sieht so aus (*zeichnet Graphen auf AB*). ...sieht dann aus wie ne Normalparabel. ** Und die ist halt nach unten geöffnet, wegen dem Minus. Und dann müsst ich für die Ableitung ** zumindest negative Werte rausbekommen, wenn ich hier keinen negativen Wert einsetze.“

Sie wechselt hier also von der graphischen Sicht zur Betrachtung von Gleichungen und kommt am Ende wieder auf die graphische Darstellung zurück. Anfangs vollzieht sie diesen Wechsel sogar ganz bewusst, indem sie als sie nicht weiterkommt ankündigt, dass sie ihr Vorgehen ändern möchte. Später wirken die Ebenen zunehmend verwoben, bis sie zu der Lösung kommt, die in der Beschränkung auf nur einen Parabelast besteht.

Bemerkenswert ist weiterhin die enge Verknüpfung der Vorstellungen mit den zugehörigen Prozeduren. Diese enge Verbindung zeigt Marina sowohl für den Steigungsbegriff als auch für den Grenzwertbegriff in Frage 6, als sie sich bemüht die allgemeine Formel für den Differenzialquotienten zu rekonstruieren:

„Da hat man irgendwas ersetzt, n'? * Ja, ja ... (*siehe AB mit KS, Graph und Markierungen für x und $x + h$*) Wenn das den (...) Punkt hat, der ist x * und der Punkt ein Stück weiter ist $x + h$ *5*. Und dann nähert man ...ah ... genau mit dem Limes und man nähert h nämlich dann ... Limes von h läuft gegen 0, so war das.“

Für die Steigung zeigt sich die enge Verbindung an den Prozess der Grenzwertbildung in der sich anschließenden Frage, in der der Grenzprozess zu beschreiben ist. Dort sagt Marina:

„Und, ähm, in der Sekantensteigung, die gibt mir jetzt erst mal die Steigung zwischen den beiden Punkten an. ** Aber ich würde jetzt sagen, das basiert wieder auf der h -Methode. Und man nähert das Q , also sozusagen dem Punkt P immer mehr an. Und dann läuft diese Sekantensteigung gegen, also wenn man es so sagt (...) Ich glaub, man kann es auch begrifflich nicht so sagen, gegen die Tangentensteigung, also h läuft sozusagen gegen 0, und dann hab ich die Steigung (*deutet auf AB*).“

Interessant ist hier gerade auch der Schluss, in dem Marina sagt, dass die Sekantensteigung gegen die Tangentensteigung „läuft.“ Sie scheint also nicht nur das Aufeinander-zu-Bewegen der Punkte sondern auch die Entwicklung der Werte für die Steigung im Blick zu haben, im Prinzip also den Differenzenquotienten für immer kleinere Intervalle und damit den Differenzialquotienten. Dazu passt auch die Tatsache, dass sie eine zutreffende Beschreibung des Begriffs der Änderungsrate abgeben kann.

Insgesamt kann damit vorsichtig unterstellt werden, dass Marina über ein stabiles und beziehungsreiches konzeptuelles Wissen zu den Begriffen Ableitung, (Sekanten-/Tangenten-)Steigung und Grenzwert verfügt. Bezüglich anderer, z.B. formaler Aspekte zeigt sie sich dagegen nicht weiter auffällig.

Das Profil von Anne

Wie die beiden zuvor genannten Schülerinnen, so verfügt auch Anne über ein gutes konzeptuelles Wissen zur Ableitung und hat ebenso eine starke Tendenz zunächst einen graphischen Zugang zu den Antworten auf die Interviewfragen zu wählen, so etwa bei der Suche nach zwei Funktionen, deren Ableitungsfunktionen identisch sind:

„(...) Ich würd' jetzt sagen,* sowas wie 1 oder 2 oder so was. Also, die eben (*A zeichnet mit dem Finger eine Waagerechte in die Luft*), die eben so'n waagerechter Strich sind. (I: mhm) Und wenn man sie ableitet, sind sie einfach 0, * glaub ich. ** “

Auch beim Versuch die durchschnittliche Steigung in Frage 12 aus dem Graphen zu bestimmen, steht zunächst die Anschauung im Vordergrund, wenn sie gleich zu Beginn sagt: „Also ich würd' sagen auf jeden Fall ist sie negativ“ und weiter:

„Okay, ** hat man vielleicht 'ne Größenordnung von 0,5 ungefähr?
6 Mhm, ne (...) das kommt mir ein bisschen wenig vor, weil das wäre nicht so steil.“

An anderer Stelle erklärt Anne ihr Vorgehen selbst so:

„Ach so, ähm, ich versuch mir jetzt gerade so 'nen bisschen graphisch vorzustellen, wie das aussieht. ** “

Dass sie bei der Beantwortung der Fragen immer wieder auf die Vorstellung der Ableitung als Steigung zurückgreifen kann, zeigt sich zu Beginn des Interviews lediglich indirekt an den richtig beantworteten Fragen 3a und 3c, wird aber von Anne explizit in Frage 12 geäußert:

„(...) Also die Steigung is' ja praktisch die Ableitung in dem Punkt.“

Von diesem Begriff der Steigung ausgehend kann Anne spontan auch eine Idee der Änderungsrate entwickeln:

„Ja, ähm, das erklärt eben wie der Graph sich eben verändert sozusagen. Also, wenn man jetzt die Steigung in 'nem bestimmten Punkt hat, sagt das ja aus * ja, sozusagen, wie die Steigung in dem nächsten Punkt, ähh * ist. Also, es ist wahrscheinlich völlig falsch erklärt so, aber ich weiß nicht anders wie ich's umschreiben soll.“

In diesem Zitat sieht es also so aus, als ob Anne in dem Begriff der Ableitung die Möglichkeit zu Trendaussagen erkennt: Die Steigung in einem Punkt sagt etwas über den nächsten Punkt aus.

Weiterhin verfügt Anne sichtbar über ein gutes Vorwissen zu den Begriffen der Durchschnittssteigung und zum Steigungsdreieck, dass sie neben wenigen anderen in Frage 12a gleich korrekt anwenden kann. Sie argumentiert zudem zur Erklärung des Prozesses der Grenzwertbildung (Frage 7) mit der Durchschnittssteigung:

„Also, dann würd' ich da so 'ne Tangente irgendwie anlegen und (...) die liegt dann so, also, ungefähr so. ** Na, das (*weist auf die Tangente*) ist halt schon eher die Steigung in dem Punkt P als in dem Q . Na, das (*weist auf die Sekante*) ist halt eher so die Durchschnittssteigung (I: mhm) irgendwie, also *7*“

Bei Frage 11 allerdings benötigt Anne Hilfe um die Schreibweise zu verstehen. Sie merkt zunächst an „ein wenig überfordert“ zu sein. Allerdings kann sie das Geschriebene, nachdem die formalen Probleme beseitigt sind, interpretieren.

Das Profil von Lars

Beispielhafte Aussagen von Lars befinden sich bereits in den Abschnitten 7.2.1 und 7.2.2. Im Abschnitt 7.2.1 belegen die Aussagen unter den Punkten „symbolisches Differenzieren“ und „graphisches Differenzieren“, dass Lars immer wieder auch bei den Anwendungen den Bezug zur Ableitung als Steigung herstellt und nutzt. Das Verständnis des Grenzwertbegriffs zeigt sich in diesem Interview in den Antworten auf die Frage 6 sehr schön, wie schon im Abschnitt 7.2.2 unter „Ableitung als Grenzwert“ erläutert. Gestützt wird dies durch Lars' Antwort auf Frage 7, die insbesondere auch die Vernetzung der Begriffe Ableitung, Steigung, Tangente, Differenzialquotient und Grenzwert zeigt. Lars sagt dort:

„... Und die Tangente is' ja dann, wenn's den Punkt P in diesem Punkt P tangiert, dann is' es ja quasi die Ableitung, also die Steigung. Und man rechnet ja bei der Ableitung nur die Steigung von dieser einen Tangente aus, in diesem Punkt da * (I: mhm) ... also * nähert sich quasi an, (I: mhm) * an den Punkt ** bis da dran, is halt quasi der Differenzialquotient mit Limes und so, * Grenzwert.“

Neben den genannten Begriffen kann Lars auch das Steigungsdreieck anwenden und zeigt auch sonst keine Auffälligkeiten, die Defizite im Vorwissen oder im Umgang mit formaler Schreibweise vermuten ließen.

Das Profil von Mareike

Schließlich zählt noch Mareike zur Gruppe der Leistungsstärksten. Gerade zu Beginn des Interviews gibt sie sehr viele richtige Antworten ohne jedoch allzu viele Überlegungen dabei zu äußern. Ein Beispiel, in dem sich das Verständnis der Ableitung als Steigung recht gut ausdrückt, ist ihre Bearbeitung der Frage 3c. Mareike hat bereits verschiedene Graphen gezeichnet, die zu Funktionen gehören, deren Ableitungen überall negative Werte haben, und wird nun gefragt, ob die Lage im Koordinatensystem eine Rolle spielt:

„Ich glaub’ schon, ** die sollten ** oh, gerade eben ...*6* Wir hatten das mal im Unterricht, aber ...*7* Nee, eigentlich nicht, weil, wenn der Graph, also ich weiß ja nicht, ob es solche Graphen gibt, wenn der hier anfangen soll und so runter gehen, dann ist es ja egal, ob es auf der positiven oder auf der negativen Seite ist, Hauptsache die fällt.“

Auch zu Beginn der ersten Mapping-Aufgabe zeigt sich, dass bei Mareike, wie bei den zuvor betrachteten Personen, die Vorstellung der Ableitung als Steigung dominiert. Gleich zu Beginn rückt sie das Kärtchen „Ableitungsfunktion“ an den zentralen Begriff „Ableitung in einem Punkt des Funktionsgraphen“

„Also, das passt auf jeden Fall, weil die Ableitung ist ja die Steigung.“

Die Vernetzung zu weiteren Vorstellungen drückt sich in Frage 7 aus:

„Ja, das war ja das, dass man da noch 'nen anderen Punkt hat. Ich glaub bei dem (*andere Aufgabe*) ist es dann h * aber ich bin mir nicht ganz sicher, und den versucht man dann immer kleiner zu machen, also den Abstand zwischen Q und P , so dass er sich immer annähern kann und irgendwann hat man dann den Punkt P * heraus. ** Und dann, deswegen nennt man's hier ja noch die Sekantensteigung, weil man da zwei Punkte hat und wenn man nur den Punkt P hat, hat man dann eben den Differenzialquotient, und das wäre ja dann die Tangente. ** Da möchte man ja wissen, was da die Steigung ist. **“

7.3.3 Leistungsgruppe 2: „Die Ableitung ist die Steigung.“

Bei dieser Leistungsgruppe ist die Zahl der Vorstellungen zum Ableitungsbe-griff, die explizit gezeigt werden, nach Tabelle 7.5 geringer als in der zuvor präsentierten Gruppe, siehe Tabelle 7.4. Aber noch ein weiterer Punkt fällt mindestens genauso sehr auf, wie dieser. Es gibt einen deutlichen Unterschied zwischen Camille einerseits und Jolante und Carla andererseits. Camille passt dem Vorstellungsprofil nach ebenso gut in die erste wie in die zweite Leistungsgruppe, kann aber einige Fragen nicht beantworten, die für die Personen in der leistungsstärksten Gruppe keine Schwierigkeit darstellen. Insbesondere sei hier auf die Erklärung des Prozesses der Grenzwertbildung in Frage 7 verwiesen, die Camille im Gegensatz zu den Personen aus Leistungsgruppe 1 nicht zu geben in der Lage ist.

Name	Differenzenquotient	Steigungsdreieck	momentane Steigung	Tangentensteigung	Grenzwert	Änderungsrate
Camille	x	x	x	x	(-)	-
Jolante	-	-	-	x	-	-
Carla	-	-	x	-	-	-

Tabelle 7.5: Übersicht zum konzeptuellen Wissen der Interviewten aus Leistungsgruppe 2

Alle Personen dieser zweiten Gruppe besitzen eine Vorstellung der Ableitung als Steigung in einem Punkt des Funktionsgraphen bzw. als Tangentensteigung. Camille zeigt als einzige weitere Ansätze, scheint aber zum Begriff des Grenzwerts keine hinreichende Vorstellung aufgebaut zu haben (siehe unten). Vage bleiben vielfach die Äußerungen in dieser Gruppe, die sich auf Begriffe des Vorwissens beziehen, so dass hierzu keine allgemeinen Aussagen über das konzeptuelle Wissen der betreffenden Schülerinnen getroffen werden können.

Das Profil von Camille

Camille hat noch eine sehr klare Vorstellung von dem Zusammenhang zwischen der Ableitung und der Steigung in einem Punkt eines Graphen bzw. auch der Steigung einer Tangente. Diese äußert sie beispielsweise, als sie angeben soll, welche weiteren Gemeinsamkeiten zwei Funktionen aufweisen, die an einer Stelle in ihren Ableitungen übereinstimmen (Frage 3b):

„Gleiche Steigung,** also an der Stelle,** weil die Ableitung (...), also die Tangenten haben die gleiche Steigung. Also haben die Funktionen an der Stelle da auch die gleiche Steigung, weil die erste Ableitung is ja gerade die Steigung * von der Tangente.“

Trotz dieser anscheinend stabilen Vorstellung, haftet Camille sehr stark an den (formalen) Ableitungsregeln. Bei ihr steht das Kalkül im Vordergrund, was durch einen schon in Abschnitt 7.2.1 (unter „symbolisches Differenzieren“) dargestellten Auszug deutlich wird:

„(...) müsste 3 sein, aber * ja, keine Ahnung, das is unlogisch, weil x wird ja auch 1, wenn man's ableitet.“

In dieser ersten Situation entscheidet sie sich schließlich dafür als Ableitung der Funktion mit $f(x) = 3x$ an der Stelle 1 den Wert 0 als Ergebnis anzugeben. Noch in einer weiteren Situation zeigt sich wiederum das starke Festhalten Camilles an Regeln, das in dem Fall anscheinend verhindert, dass sie sich auf das graphische Differenzieren einlässt, wie es Frage 4 erfordert:

„(...) Wenn ich die Funktion hätte, dann könnt ich's. *5* Hmm, es is' sinnlos (*zeichnet etwas, radiert es aber gleich wieder weg* *5* *schreibt eine Funktion und die zugehörige Ableitung an den Rand von Blatt 4*) blöd.“

In den Fragen 6 und 7, die sich mit der Durchführung bzw. der Beschreibung des Grenzprozesses zur Bildung des Differenzialquotienten befassen, zeigt sich, dass der Grenzwertbegriff offenbar nicht adäquat aufgebaut wurde. Denn in Frage 6 ersetzt Camille zunächst x_0 durch eine Zahl in der (falschen) Formel des Differenzenquotienten und nach dem Voranstellen des Limes-Symbols auch x durch genau diese Zahl. In der Konsequenz bekommt sie natürlich 0 als Wert heraus (ausführlicher in Abschnitt 7.2.1 unter dem Aspekt „Differenzieren per Grenzwertbildung“). Dieser Eindruck des fehlenden oder fehlerhaften Grenzwertbegriffs wird durch Camilles Antwort auf Frage 7 gestützt, in der es ihr nicht gelingt den Sekanten- an den Tangentenbegriff anzubinden:

„(...) Das wär' dann die Tangente an den Punkt zum Beispiel (*siehe Zeichnung*). (I: mhm) Und die kann man dann durch die erste Ableitung von dem Graphen im Punkt P * ja und die Sekantengleichung, weiß ich nich ...“

Dennoch nutzt Camille in der zweiten Mapping-Aufgabe die Relation „ist Grenzwert von“. Sie stellt auf diese Weise den Differenzialquotienten richtig als Grenzwert des Differenzenquotienten fest, benutzt dabei jedoch keine eigene Formulierung und bietet auch keine weiteren Erklärungen an.

Das Profil von Jolante

Jolante ist die erste Befragte bisher, die die Ableitung zwar mit dem Begriff der Steigung verbindet, die Begriffe aber nicht unmittelbar gleichsetzt. Das kommt besonders klar in der Beschreibung des Prozesses der Grenzwertbildung (Frage 7) zum Ausdruck:

„Ja, gut, die Ableitung is ja, *6* wenn, wie hieß die ..., ** Punkt-Steigungs-Formel ... * Oder ne, erst mal anders. Die Ableitung is ja die, ähm, Steigung ** auch aller Sekanten. ** äh, aller Sekanten?! Ja, auf jeden Fall *, ja, sag ich jetzt einfach mal. Und dann,

* wenn man dann (...) Wenn man sonst die Funktions-, ähm die Funktion hat, dann könnte man ja * davon die Ableitung machen oder bestimmen und anhand der Ableitung die Steigung dann herauskriegen mit dem $y = mx + t$. *4* “

Später (in Frage 13) stellt Jolante doch noch heraus:

„Also, doch, wenn die Ableitung *4*, die Ableitung is’ ja die Steigung der Tangente.“

Allerdings zeigt sich beim Legen der Concept Maps, dass sie die Tangentensteigung nicht mit der Steigung des Funktionsgraphen in einem Punkt in Verbindung bringt, weshalb sie letztere aussortiert:

„Gut, Steigung des Funktionsgraphen, *5*, die würd’ ich eigentlich gar nicht dazunehmen. * Und, da müssen nicht alle dabei sein? “

Eine gewisse Ferne des Ableitungsbegriffs von der Steigung in einem Punkt eines Funktionsgraphen wird schon durch die Vorstellung des Differenzierens als Spiegelung an der x -Achse impliziert, wie Jolante sie zu haben scheint und wie bereits im Abschnitt 7.2.1 am Ende unter „graphisches Differenzieren“ beschrieben wurde.

Gleichzeitig zeigt Jolante, ganz ähnlich zu Camille, ein starkes Festhalten an Formeln und Regeln. Teils hat Jolante mit ihrem formalen Vorgehen durchaus Erfolg, so etwa in der in Abschnitt 7.2.1 beschriebenen Situation bei der Beantwortung von Frage 2:

„Ja, aber weil das ja ein Produkt is und keine * (I: mhm), also, weil das ja sonst **, also wenn dann zum Beispiel $g(x)$ jetzt einfach nur 3 wär, ohne das x , dann wäre das ja ** 0, die Ableitung ...“

Jolante analysiert die Funktionsgleichung, identifiziert sie als Produkt und kann so die korrekte Ableitungsregel anwenden und die gewonnene Ableitungsfunktion im Gegensatz zu Camille schließlich erfolgreich auf die angegebene Stelle beziehen. Ein anderes Beispiel für Jolantes formale Stärke bietet das Finden zweier Gleichungen von Funktionen mit identischer Ableitungsfunktion (Frage 3a), wie schon zuvor im Abschnitt 7.2.1 dargestellt:

$$\begin{aligned} f(x) &\neq g(x) \\ f'(x) &= g'(x) \\ f(x) &= 2x^2 + 3 \\ f'(x) &= 4x \quad g'(x) = 4x \quad \Rightarrow g(x) = 2x^2 \end{aligned}$$

Das Profil von Carla

Carla wiederum zeigt eine ganz klare Vorstellung der Ableitung als Steigung:

„Ne Ableitung ist ja praktisch die Steigung von der Funktion, *
von, die die abgeleitet wird.“

Diese und eine weitere Aussage Carlas finden sich auch bereits im Abschnitt 7.2.1 unter dem Punkt „graphisches Differenzieren“ als Beleg für die Interpretation der Ableitung als Steigung.

Auffällig sind noch zwei weitere Aussagen von Carla zur Steigung, die zueinander in Widerspruch stehen und erahnen lassen, dass Carla über keinen geeigneten Grenzwertbegriff verfügt. Im Zusammenhang mit Frage 7 sagt sie zum einen:

„(...) weil ein Punkt an sich hat ja eigentlich keine Steigung, also das ist ja schon ein bisschen, klein bisschen mehr.“

Zum anderen sagt sie auf die Frage nach dem Wert der Steigung an den (nicht-differenzierbaren) Stellen des Graphen von Frage 12:

„Hier? (I: mhm!) *4* Ja, da würd' ich sagen ist die Steigung gleich null, (I: mhm!) weil das ist ja genau dieser Punkt ** und da ist es negativ und da positiv. Also, ich hab zumindest mal gelernt auf dem Punkt dazwischen ist dann die Steigung gleich null. (I: mhm!) weil's ja dann sich umkehren muss. **“

Außerdem treten bei Carla Defizite zum Funktionsbegriff bzw. in der Verbindung zur Ableitungsfunktion zutage. Für sie scheint nicht selbstverständlich zu sein, dass der Definitionsbereich der Ausgangsfunktion auch der der Ableitungsfunktion ist (siehe das Zitat unten). Außerdem schreibt sie Funktionen einen „Anfangswert“ zu. So findet sich zu Aufgabe 4, der Frage nach der Angabe eines Funktionsgraphen, der zu einer Funktion mit durchgehend negativer Ableitungsfunktion gehört, die Aussage:

„Das müsste ja da * also positiv *5* also müsste die Ableitung auch positiv sein an der Stelle.*38* Tut mir leid, ich hab' keine Ahnung, wo ich da anfangen sollte. ** Ist halt die Frage, ob der Anfangswert oder * je nach dem, wo die, wo der Graph die Achsen schneidet, auch da ist, wo die Ableitung anfängt. * Ich hab Ableiten nur immer ohne Zahlen gemacht. ** (Interviewerin: Wie, ohne Zahlen?) Also wie gesagt, wenn die Steigung immer positiv ist, dann ist praktisch die Ableitung positiv. Aber wo die jetzt dann ist in dem ganzen System * das wüsst ich nich (*zeigt auf KS*) *7*“

7.3.4 Leistungsgruppe 3: „Ich muss es rechnen können.“

Name	Differenzenquotient	Steigungsdreieck	momentane Steigung	Tangentensteigung	Grenzwert	Änderungsrate
Anja	-	-	-	-	-	-
Ronja	-	-	-	-	-	-
Isabella	-	-	-	-	-	-
Jantine	-	-	-	-	-	-

Tabelle 7.6: Übersicht zum konzeptuellen Wissen der Interviewten

Insofern Tabelle 7.6 vage Vorstellungen nicht aufführt sondern nur explizit gewordene, stabile Vorstellungen erfasst, scheinen diese Vorstellungen zum Ableitungsbegriff in dieser Gruppe vollständig zu fehlen. Weiterhin kennzeichnet diese Gruppe eine deutlich von Regeln und Prozeduren bestimmte Herangehensweise an die Fragen, teils selbst dann, wenn diese sich mit Ideen oder Erklärungen befassen, also deutlich konzeptuell ausgerichtet sind.

Defizite zeigen sich daneben im Vorwissen, was insbesondere bei Ronja offensichtlich wird (siehe weiter unten). Dennoch werden von den Personen dieser Gruppe vereinzelt Fragen richtig beantwortet. Es stellt sich die Frage, ob dies ganz ohne konzeptuelles Wissen geleistet wird oder ob doch vage Ideen oder besondere andere Kenntnisse und Strategien hier zum Tragen kommen. Eine naheliegende Vermutung ist die, dass das Wissen stark kontextabhängig ist und nur in bestimmten Situationen abgerufen werden kann.

Das Profil von Anja

Anja kann viele Fragen nicht beantworten. Der Fragenblock fällt im Transkript auffallend kurz aus, was damit zu erklären ist, dass Anja häufig sehr schnell abbricht bzw. überhaupt keinen Ansatz findet. In Frage 12 zeigt sich, als sie das Steigungsdreieck aufstellen möchte und sich über die Belegung von Zähler und Nenner nicht sicher ist, dass sie nicht in der Lage ist selbstständig auf die Ebene der Anschauung auszuweichen:

„Ähm, ** die Steigung, bei so normalen Geraden macht man ja mit diesem Steigungsdreieck (I:mhm). * Ich dachte, vielleicht geht's hier

auch. (Interviewerin: ja?) *5* Aber ich bin mir jetzt nicht sicher, ob man das jetzt dann $\frac{15}{2}$ nennt oder $\frac{2}{15}$. ** Was kommt denn zuerst, das unten oder das oben? (*zeigt auf y-Achsenabschnitt und x-Achsenabschnitt*) *3* (Interviewerin: Sie können ja mal gucken, ob man dem Graphen das irgendwie ansieht, wo das ungefähr in der Größenordnung liegt.)*4* Das is schon 'ne starke Steigung, also ** hm, * ja dann $\frac{15}{2}$ ** (Interviewerin: ok, * $\frac{15}{2}$, ja, ...) Is' irgendwie falsch, oder? ** "

Trotz des Hinweises sich an der Anschauung zu orientieren, gelingt es Anja hier also nicht ihr Resultat abzusichern, zudem entgeht ihr, dass der Graph an der betreffenden Stelle fällt und die Steigung damit in jedem Fall negativ sein muss.

Ohne die Vorstellung der Ableitung als Steigung hält sich Anja, beispielsweise im zweiten Teil der Frage 12, am Kalkül fest:

„Interviewerin: Ok, und wenn man da jetzt fragt, wie da die Ableitung ist *, an dieser Stelle $x = 2$? **

Anja: Ja, ** ähm ** also * hm, 2 wär ja ähnlich ... Also, ich dachte immer die Zahl is' ja 0. * Aber das wird nicht gezählt, ne? **“

Auf Nachfragen bestätigt Anja hier, dass sie die Zahl 2 als Konstante betrachtet, die sie nach der Ableitungsregel für Konstanten differenzieren möchte. Ob sie den Unterschied zwischen der Ableitung in einem Punkt und einer Ableitungsfunktion prinzipiell kennt, ist aus dem Interview nicht ersichtlich.

Vermutlich mangels anderer Möglichkeiten, wählt sie beim Erstellen der Concept Maps die Strategie Begriffe einander nach Oberflächenmerkmalen zuzuordnen, d.h. beispielsweise, dass alle Begriffe mit dem Wort „Punkt“ aneinander gerückt werden, etwa Ableitung in einem Punkt und die Steigung des Funktionsgraphen in einem Punkt:

„Ähm ** ja is' schon mal das gleiche, ein Punkt und in einem Punkt. Das gehört einfach mal zusammen “

Auf die Frage nach dem Grund für die Position der Tangentensteigung antwortet Anja ähnlich und integriert auch die neue Information aus dem Interview, dass die durchschnittliche Änderungsrate gleichbedeutend ist mit der durchschnittlichen Steigung:

„Ähm, * weil * das halt mit der Steigung zu tun hat (I. mhm), weil's auch 'ne Steigung is', also, irgendwie dasselbe (*deutet auf das Kärtchen „momentane Änderungsrate“ hin.*)“

Gerade diese Strategie des Sortierens nach Oberflächenmerkmalen deutet nach Hiebert und Lefevre (1986) auf eine eher niedrige Wissensqualität des konzeptuellen Wissens, siehe Abschnitt 3.2.2.

Das Profil von Ronja

Ähnlich wie Anja, basieren auch Ronjas Argumentationen auf Prozeduren und auswendig gelernten Regeln, so etwa in Frage 4 zum graphischen Differenzieren:

„Ich weiß halt nur, wenn, wenn die Steigung positiv ist, dann muss die Ableitung von oben kommen und im positiven Bereich sein. Aber ich wüsste jetzt nicht wie ich das da * ähm *5*“

Offensichtlich fehlt Ronja hier die genaue Vorstellung der Ableitung als Steigung, wie ihr auch weitere Vorstellungen nicht vorliegen, wenn sie angesichts der Concept Map-Kärtchen sagt:

„Leider sagt mir auch schon was in der Mitte liegt nicht so viel, also Ableitung in einem Punkt. Darum kann ich auch leider zu dem generell nicht soviel sagen.“

Hier liegt wie bei Anja die Vermutung nahe, dass zwischen der Ableitung in einem Punkt und der Ableitungsfunktion nicht unterschieden wird. Auch Lücken im Vorwissen treten bei Ronja recht deutlich zutage, etwa bei Frage 9, in der der Begriff der Tangente vorkommt:

„Öhm. *45* Können Sie mir das Wort Tangente noch mal erklären?“

Ähnliches lässt sich für den Begriff des Steigungsdreiecks beobachten:

„Ich kann mich daran irgendwie nicht erinnern. Ich weiß, dass wir dann an dem Punkt irgendwelche . . . , also * immer genauer geworden sind und uns vorgearbeitet haben, dass man immer den Punkt genau bestimmt. Aber ich könnt jetzt nicht mehr irgendwie, . . . Ähm, ich weiß nicht mehr, wie man dann vorgegangen ist, weiter.“

Der Schluss dieser Passage zeigt wiederum eine deutliche Ausrichtung auf die Prozeduren, die es offenbar aus Ronjas Sicht algorithmisch abzuarbeiten gilt.

Das Profil von Isabella

Isabellas Idee des Differenzierens scheint einer Verschiebung entgegen der x -Richtung zu entsprechen:

„Ein positives x is' . . . , is' doch dann negativ * in der Ableitung ** oder nich?“

und später, als sie graphisch differenzieren soll:

„Ich glaub das wird eigentlich eines, nur noch x . Dann wird's einfach weniger (*zeichnet Graph in das Koordinatensystem auf das Blatt zu Aufgabe 4*). Das verschiebt sich einfach so nach da * (*deutet über dem AB nach links*).“

Dementsprechend sind auch bei Isabella Vorstellungen der Ableitung als Tangentensteigung oder Steigung des Funktionsgraphen aus den Antworten im Interview nicht zu erkennen und vermutlich nicht vorhanden.

Ganz ähnlich zu Ronja hält sie sich an Regeln und Prozeduren bzw. die algebraische Repräsentationsform. So tendiert sie in Frage 4 eher zum symbolischen als zum graphischen Differenzieren:

„Ja, aber da brauch' ich doch eigentlich erst so 'n $f(x)$ ist gleich dö, dö, dö * um den Graphen zu zeichnen. Sonst weiß ich ja gar nicht, * wie, was ich da ableiten soll, oder? “

Während sich zum Tangenten- und Funktionsbegriff keine Auffälligkeiten im Sinne von Defiziten zeigen, ist der Begriff des Steigungsdreiecks offenbar nicht adäquat vorhanden. Isabella verbindet den Punkt des Graphen, in dem die Steigung mittels Steigungsdreieck in etwa abgeschätzt werden soll, mit dem Ursprung, schätzt dann den Winkel ab und gibt ihr Ergebnis in der Einheit „Grad“ an (siehe Abbildung 7.15).

Das Profil von Jantine

Abschließend bleibt noch Jantine. Auch ihr Profil zeigt einige Parallelen zu den Profilen von Anja, Ronja und Isabella. Beispielsweise wird gleich im Zusammenhang mit der Frage 3b offenkundig, dass sie über keinerlei Vorstellungen zum Ableitungsbegriff verfügt:

„Ich frag mich nur gerade ehrlich gesagt noch mal, was die Ableitung denn eigentlich ist.“

Zum Funktionsbegriff bzw. zum Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion zeigt sich bei Jantine (Frage 8) ein deutliches Fehlkonzept. Gefragt war danach, was sie sich spontan unter einer Änderungsrate vorstellen könnte:

„Ja, der Verlauf wahrscheinlich. *3* Und wahrscheinlich auch noch der Anfangs- und Endpunkt. Also die Ränder des Graphen ändern sich wahrscheinlich.“

Weitere Defizite im Vorwissen beziehen sich auf das Steigungsdreieck. In Frage 12 arbeitet Jantine mit den Koordinaten nur eines Punktes statt mit den Differenzen der Koordinaten zweier Punkte.

Das bereits zuvor in Abschnitt 7.2.1 angegebene Zitat drückt zudem das Festhalten an Formeln und Kalkülen aus:

„...ich hab echt, ich kann mir dadrunter echt nichts vorstellen. Gar nichts. *4* Ich kann's ja noch nicht mal rechnen. *2* Also wenn ich's rechnen könnte, wenn ich irgendwas in eine Formel einsetzen könnte. (I: hm) Aber ich kann mir darunter leider ja überhaupt nichts vorstellen. *3*“

Insgesamt bestätigt Jantine durch ihre Betonung algorithmischer Prozeduren sowie die fehlenden Anschauungen und das geringe Vorwissen die Charakteristika ihrer Leistungsgruppe.

7.4 Weitere Ergebnisse unter Berücksichtigung der Concept Maps

Für die voranstehende Beschreibung der Profile der Interviewten (Abschnitt 7.3) sind teils Aussagen herangezogen worden, die während des Legens der Concept Maps von den Schülerinnen und Schülern gemacht wurden. Hier sollen diese Aussagen jedoch systematisch, z.B. im Hinblick auf die zuvor festgelegten Leistungsgruppen, analysiert werden.

7.4.1 Vorbemerkung zur Methode

Die Concept-Mapping-Aufgaben haben insbesondere die Funktion, dass Schülerinnen und Schülern, die zuvor im Interview eher unpräzise Erklärungen gegeben haben bzw. sprachlich nicht in der Lage waren ihr Wissen korrekt darzustellen, die Gelegenheit gegeben wird dies nun anhand der vorgegebenen Begriffsbezeichnungen zu tun. Dennoch spielt dieser Teil in den Interviews eher eine nachgeordnete Rolle, da sich während eines Interviews Lerneffekte ergeben können, die kombiniert mit den nur eingeschränkten Möglichkeiten korrekte Zusammenhänge nahelegen. Des Weiteren lassen sich die Befragten nur teilweise auf die vorgegebenen Bezeichnungen ein und geben ihm selbstverständlich eigene Interpretationen. Gerade für die zweite Aufgabe, in der neben

den Begriffsnamen aus der ersten Map auch eine Menge an Relationen vorgegeben war, gilt, dass die Angaben eher zu stark lenkten und weitere Erklärungen in einigen Fällen sogar unterbunden haben.

Vorteilhaft ist dagegen, dass in den meisten Fällen sehr deutlich wird, welche Begriffe die Schülerinnen und Schüler als zentral ansehen und welche sie gar nicht einordnen können und daher aussortieren. Während die Befragten an dieser Stelle in der Regel erklären, warum sie bestimmte Begriffe auslassen, konnten sie diese im vorangegangenen Teil des Interviews einfach vermeiden.

Ein deutlicher Schwerpunkt auf dem Begriff der Tangentensteigung lässt sich beispielsweise bei Camille gut erkennen. Das folgende Zitat belegt dies durch eine Aussage gleich vom Beginn der ersten Mapping-Aufgabe:

„... Tangentensteigung is' ja klar, da ging 's ja die ganze Zeit drum, dass eben die Ableitung in 'nem Punkt is' die Steigung von 'ner Tangente im gleichen Punkt * und *5* ja das is ja dann, die Tangentensteigung is' ja dann eben die Steigung von 'nem Funktionsgraphen.“

Insgesamt machten einige Befragte einen unvertrauten Eindruck mit der Methode, und dies, obwohl bewusst auch sehr vage Relationen, wie z.B. „ist abhängig von“ zur Auswahl standen. Dem Anschein nach wählte aber, wer es genauer wußte eine andere Relation, die den Zusammenhang konkreter zu fassen vermochte.

Nun sollen jedoch zunächst systematische Unterschiede zwischen den einzelnen Personen und den Leistungsgruppen untersucht werden. Insbesondere stellt sich dabei die Frage, inwieweit die Analysen zu den Concept Maps die zuvor vorgenommene Zuteilung von Personen zu Leistungsgruppen bestätigen.

7.4.2 Überprüfung der Leistungsprofile anhand von Concept Maps

Zunächst wird betrachtet, wie die verschiedenen Personen einer Leistungsgruppe die Concept Maps bearbeiten. Wie im folgenden Text noch belegt werden wird, zeigen sich dabei innerhalb der Gruppen einerseits Gemeinsamkeiten, die die jeweilige Gruppe von anderen Leistungsgruppen klar abgrenzt. Andererseits zeigen die Gruppen im Umgang mit diesen Aufgaben jeweils eine größere Heterogenität. So variieren etwa der Umfang der Maps wie auch der Umfang der Erläuterungen in allen Gruppen stark.

Concept Maps der 1. Leistungsgruppe

Anne, Lars und Marina beginnen ihre erste Map mit der „Tangentensteigung“, die sie an den vorgegebenen Begriff „Ableitung in einem Punkt“ anlegen. Lars erklärt:

„Also, Ableitung in einem Punkt (*I: mhm*), ok, das is quasi gleichwertig mit Tangentensteigung“

Demgegenüber legen Mareike und Silke dort die „Steigung des Funktionsgraphen in einem Punkt“ an, stellen allerdings gleich im Anschluss die Verbindung zur „Tangentensteigung“ her. Insgesamt scheint daher die Vorstellung der Steigung für diese Leistungsgruppe zentral zu sein um sich dem Begriff der Ableitung in einem Punkt zu nähern (siehe auch Abbildung 7.16).

Auch in der zweiten Mapping-Aufgabe zeigt sich dieser Schwerpunkt. Dieser Befund ist allerdings nach den vorangestellten Profilen nicht verwunderlich, wählen die Schülerinnen und Schüler dieser Gruppe doch tendenziell eher einen graphischen Zugang (siehe Abschnitt 7.3). Durch die Vorstellung der Ableitung als Steigung wird dieser graphische Zugang erst nahegelegt.

Die Personen dieser Leistungsgruppe bauen insgesamt gesehen beziehungsreiche Netze auf. Die dargestellten Zusammenhänge sind größtenteils zutreffend, wenn auch gelegentlich Differenzen- und Differenzialquotient miteinander verwechselt oder ungenau erklärt werden, wie etwa bei Mareike und Marina. Die beiden letztgenannten bleiben in ihren Erklärungen im Vergleich etwas unpräzise.

Dagegen werden die Begriffe „Ableitung in einem Punkt“ und „Ableitungsfunktion“ von allen Personen dieser Gruppe souverän unterschieden, z.B. von Anne:

„Das ist eben, wenn ich die Funktion hab, dann kann ich eben die Ableitung in einem Punkt bestimmen.“

Concept Maps der 2. Leistungsgruppe

Diese Gruppe fällt bei Betrachtung der gelegten Concept Maps bzw. dazu geäußerten Erklärungen auseinander. So ist auch in Camilles Erläuterungen der Begriff der Tangentensteigung zentral, wie bereits für die Personen der ersten Leistungsgruppe. Ebenso legt sie in der zweiten Aufgabe eine Concept Map, die sich durch einen großen Umfang und eine enge Vernetzung der enthaltenen Begriffe auszeichnet. Unter Berücksichtigung der hinzugefügten Erklärungen übersteigt die Qualität von Camilles Aufgabenbearbeitung die von Marina oder Mareike sogar. Allein die Abgrenzung der Begriffe „Ableitung in einem Punkt“ und „Ableitungsfunktion“ mislingt:

„Weil von 'ner Funktion kann man ja dann in 'nem Punkt eben die Ableitungsfunktion machen.“

Später werden die Begriffe nochmals auf ähnliche Weise vermischt:

„Ok, die Ableitungsfunktion * kann *4* ja, kann die Funktion, also die Ableitung von der Funktion in einem Punkt sein, muss aber nich', weil man muss ja nich' genau 'nen Punkt nehmen.“

Im Gegensatz zu einigen anderen Personen hat sie den Konflikt zwischen den Begriffen „Ableitung in einem Punkt“ und „Ableitungsfunktion“ für sich selbst offensichtlich aufgelöst ohne diese Begriffe dazu gleichzusetzen. Die Ableitungsfunktion umfasst in Camilles Augen mehrere unterschiedliche Fälle. Insofern kann sie nach Betrachtung ihrer Bearbeitungen der Mapping-Aufgaben kaum noch treffend einer der bereits bestehenden Leistungsgruppen zugeordnet werden; eher wäre eine eigene Kategorie für sie zu finden.

Bei Carla zeigt sich, dass sie im Gegensatz zu Jolante zwischen den Begriffen „Ableitung in einem Punkt“ und „Ableitungsfunktion“ unterscheidet. In anderen Punkten bleibt sie jedoch auffallend vage. So klammert sie zum einen die Begriffe „Differenzial-“ und „Differenzenquotient“ aus und beschreibt den Bezug der „Tangentensteigung“ zur „Ableitung in einem Punkt“ wenig präzise:

„Also Tangentensteigung hatten wir ja eben schon (*legt dieses Schild links neben Ableitung in einem Punkt*), dass es auf jeden Fall auch 'ne Rolle spielt, also dass irgendwie, wenn Steigung gleich 0, dass dann 'ne waagerechte Tangente in dem Punkt is. *6* Ja und die Steigung des Funktionsgraphen in einem Punkt ist ja praktisch die Ableitung in einem Punkt eines Funktionsgraphen.“

Jolante legt die „Steigung des Funktionsgraphen in einem Punkt“ beiseite, interpretiert die Ableitung in einem Punkt jedoch klar als Tangentensteigung:

„Also, Tangentensteigung deshalb, weil die Ableitung eben die Tangentensteigung is **.“

Vom Differenzen- und Differenzialquotienten scheint sie immerhin noch eine ungefähre Idee zu haben, siehe Abbildung 7.17

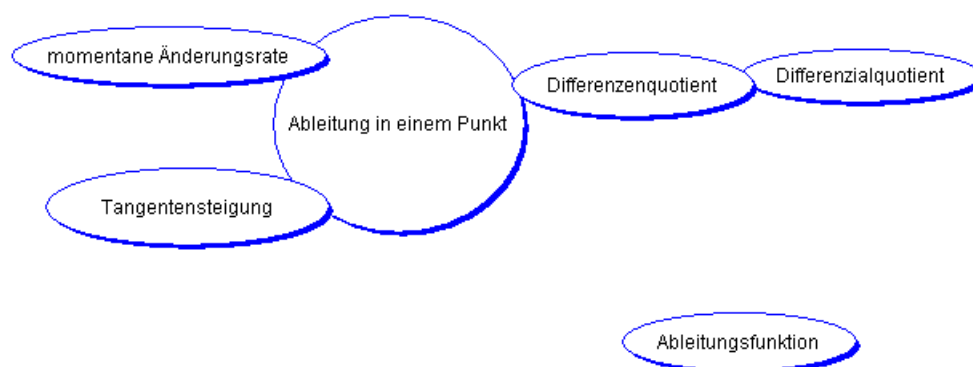


Abbildung 7.17: Jolantes Map zur 1. Mapping-Aufgabe

Concept Maps der 3. Leistungsgruppe

Bei den Personen dieser Gruppe kommt es vermehrt zu Fehlern in den dargestellten Relationen. Gelegentlich bleiben Zusammenhänge vage, wobei speziell bei Anja der Eindruck der Beliebigkeit entsteht. Wie bereits vorher, in diesem Kapitel, im Abschnitt 7.3.4 am Ende von Anjas Profil dargestellt, entscheidet sie nach Oberflächenmerkmalen über die Zusammengehörigkeit der verschiedenen Begriffe. Zwei Kärtchen, die beide den Wortteil „Steigung“ tragen, legt sie nach dieser Strategie beispielsweise nahe aneinander.

Ähnlich diffus bleiben die Zusammenhänge, wie Isabella sie darstellt. Sie hat anscheinend eine grobe Idee davon, formuliert die Relationen am Ende jedoch oft nicht ganz zutreffend. Insbesondere macht sie aber einen Unterschied zwischen der Tangentensteigung und der Steigung des Funktionsgraphen in einem Punkt:

„Da weiß ich jetzt irgendwie, Steigung des Funktionsgraphen in einem Punkt, ** das is' wahrscheinlich *, ja, das hat halt was mit der Tangentensteigung zu tun, weil's dann eben noch mal genauer eben einen * Punkt beschreibt, so.“

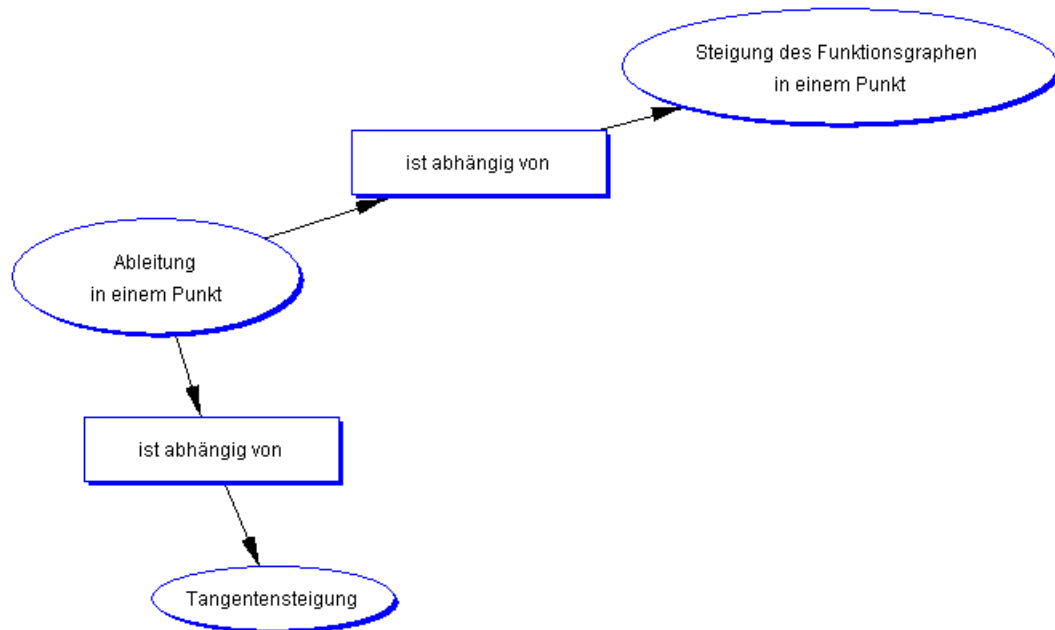


Abbildung 7.18: Ronjas Map zur 2. Mapping-Aufgabe

Bei den übrigen Personen dieser Leistungsgruppe, Jantine und Ronja, fällt speziell der geringe Umfang der Maps auf (siehe dazu auch Abbildung 7.18). Bei Jantine wird zwischen den Begriffen „Ableitung“ und „Ableitungsfunktion“ nicht unterschieden:

„Wo ist da der Unterschied?“

Ronja dagegen ist die Ableitung in einem Punkt offenbar unbekannt:

„Also, das sagt mir klar was (*legt den Begriff Ableitungsfunktion ab*). Und *5* leider sagt mir auch schon was in der Mitte liegt nicht so viel, also Ableitung in einem Punkt. Darum kann ich auch leider zu dem generell nicht soviel sagen.“

Wie aus Abbildung 7.18 klar ersichtlich beschränkt sich Ronja daher auch auf die zwei dargestellten Verbindungen, für die sie in beiden Fällen die eher vage Formulierung „ist abhängig von“ auswählt.

Im Vergleich zu Ronja sind die Leistungen der anderen Gruppenmitglieder deutlich stärker. Jantine erfasst z.B. den Zusammenhang zwischen der Tangentensteigung und dem Differenzialquotienten, wenn sie folgendes erklärt:

„Die Tangentensteigung ist der Differenzialquotient, die Lösung des Differenzialquotienten oder so“

7.5 Zusammenfassung der Ergebnisse

In den vorangegangenen Abschnitten sind die Auswertungsergebnisse aus dem Leistungstest und dem Interview deskriptiv dargestellt worden, Ergänzungen lieferten die gelegten Concept Maps. Dabei geben die Ergebnisse des Leistungstests bereits erste Hinweise auf die Qualität des prozeduralen und in erster Näherung auch des konzeptuellen Wissens der Schülerinnen und Schüler. Besonders deutlich zeigt sich dabei zum einen, dass die Teilnehmer das symbolische Differenzieren in der Regel gut beherrschen, während das graphische Differenzieren – obwohl nur im geschlossenen Aufgabenformat abgefragt – nicht bewältigt wird. Zum anderen zeigen sich Defizite in der gemeinsamen Anwendung prozeduralen und konzeptuellen Wissens, die sich an dieser Stelle aber noch nicht genauer erklären lassen.

Die folgende Auswertung des Interviews ist sowohl umfangreicher als auch differenzierter angelegt. Die Darstellung der Ergebnisse beginnt mit den Fragen zu den Prozeduren, wobei im Interview allerdings auch das symbolische und das graphische Differenzieren, sowie das Differenzieren per Grenzwertbildung aktiv auszuführen und nicht etwa innerhalb geschlossener Aufgabenformate wiederzuerkennen waren. Insofern eignet sich das Interviewmaterial besser für den Vergleich zwischen den Prozeduren. Dieser ergibt, dass die Rate an richtigen Antworten beim symbolischen Differenzieren am höchsten ist und das Differenzieren per Grenzwertbildung gar nicht gelingt.

Beim konzeptuellen Wissen ist die Vorstellung der Ableitung als Steigung der dominierende Aspekt. Er wird von einigen sehr häufig zur Argumentation herangezogen, während dennoch manche Personen den Begriff der Steigung gar nicht verwenden. Der Begriff des Grenzwerts wird zwar auch häufiger geäußert, aber doch deutlich weniger als der der Steigung. Immerhin drei Personen können spontan eine zutreffende Idee für den Begriff der Änderungsrate entwickeln, obwohl ihn die Befragten allesamt nicht aus ihrem Mathematikunterricht kennen.

Mit dem formalen Wissen haben die interviewten Schülerinnen und Schüler teils ganz unerwartete Probleme. So wird etwa eine Stelle x häufiger als Punkt interpretiert (siehe Abschnitt 7.2.3). Ebenfalls Probleme bereitet beispielsweise das Grenzwert-Symbol $\lim_{x \rightarrow x_0}$, bei dem mit dem Pfeilsymbol gelegentlich wie mit dem Gleichheitszeichen umgegangen wurde.

Bei einzelnen Personen, wie etwa Jolante und einzelnen Fragen (Nummern 2 und 3a) erweist sich die formale Schreibweise als sehr hilfreich um Fragen zu beantworten (siehe Abschnitt 7.3.3).

Schwächen im Vorwissen zeigen sich vor allem bei der „durchschnittlichen Steigung“ oder dem „Differenzenquotienten“. Schon der recht alltäglich erscheinenden

de Begriff des Durchschnitts bereitet einigen Schülern Probleme, siehe Abschnitte 7.2.4 und 7.3.

Nachdem das prozedurale und das konzeptuelle Wissen, die formalen Fähigkeiten und die Kenntnisse der Vorwissensbegriffe jeweils einzeln betrachtet wurden, werden die Personen nach der Zahl der richtig beantworteten Interviewfragen auf einer Skala angeordnet, siehe Abschnitt 7.3. Anschließend wurde der Blick auf die inhaltlichen Unterschiede gelenkt und so eine Einteilung in drei Leistungsgruppen vorgenommen. Diese Gruppen und die zugehörigen Personen wurden im folgenden basierend auf den oben genannten Aspekten, prozedurales und konzeptuelles Wissen, formale Fähigkeiten und Vorwissen charakterisiert.

Die erste Gruppe zeichnet sich dabei vor allem aus durch ...

- eine starke Tendenz einen graphischen Zugang zu wählen,
- eine Betonung der Interpretation der Ableitung als Steigung,
- die Verfügbarkeit des Grenzwertbegriffs,
- eine gute Eingebundenheit der Begriffe der Steigung und des Grenzwerts in das umgebende Begriffsnetz (siehe 4.2.2) sowie
- die Fähigkeit, die ursprünglich gewählte Anschauung bzw. Repräsentationsform verlassen zu können.

Einzelne Personen dieser Gruppe zeigen zudem ...

- eine Idee der Änderungsrate,
- ein stabiles Vorwissen, etwa zum Steigungsdreieck und zum Differenzenquotienten und
- auffällige formale Stärken.

Diese Gruppe, mit den meisten richtig beantworteten Interviewfragen, zeigt sich weitgehend homogen. Mareike antwortet zwar relativ zurückhaltend, gibt aber keinen Anlass ihr etwaige Vorstellungen abzusprechen, über die die übrigen Personen dieser Gruppe verfügen.

Auffallend sind damit bei dieser Gruppe ein breites konzeptuelles Wissen, welches sich größtenteils auch als sehr vernetzt zeigt (siehe Abschnitt 7.3.2). Als wichtigste Interpretation der Ableitung lässt sich für diese Gruppe, wie auch insgesamt, die Steigung ausmachen. Weiterhin ist aber auch der Grenzwertbegriff stabil vorhanden. In dieser Leistungsgruppe zeigen einige Personen besondere Stärken im Vorwissen wie auch im formalen Bereich.

Die zweite Gruppe ist weniger homogen als die erste. Eine allgemeine Charakteristik dieser Gruppe beinhaltet, dass ...

- alle zugehörigen Personen über die Vorstellung der Ableitung als Steigung verfügen oder eine ungefähre Idee davon haben,
- keinen angemessenen Grenzwertbegriff besitzen und
- sich (fast) ausschließlich auf das Kalkül der Ableitungsregeln verlassen.

Zu einem nicht angemessenen Begriff des Grenzwerts zählt dabei auch, wenn dieser nicht in ein Begriffsnetz eingebunden ist. Diese geringe Vernetztheit deutet sich bei verschiedenen Personen an. Dieser Befund liegt schon aufgrund der Tatsache nahe, dass im Unterschied zur ersten Leistungsgruppe in der zweiten niemand in der Lage ist den Prozess der Grenzwertbildung zu beschreiben, siehe Abbildung 7.14.

Weiterhin zeigt sich, dass der Begriff der Steigung weniger häufig zur Lösung bzw. zur Argumentation herangezogen wird. Insgesamt halten sich die Personen dieser Gruppe eher an Regeln und Algorithmen und suchen somit seltener einen graphischen Zugang.

In Bezug auf das Vorwissen wie auch auf formale Fähigkeiten zeigen sich hier allerdings in der Gruppe wesentliche Unterschiede. Treten in diesem Bereich innerhalb der Gruppe allgemein vermehrt Probleme auf, so zeigen einzelne Personen dennoch große Stärken. Während diese im Fall von Camille im Vorwissen und im vergleichsweise umfangreichen konzeptuellen Wissen liegen, ist es bei Jolante die formale Stärke.

Die Personen der dritten Leistungsgruppe schließlich ...

- verstehen symbolisch zu differenzieren,
- suchen ausschließlich nach einer rechnerischen Herangehensweise,
- zeigen keinerlei Anschauung zum Ableitungsbegriff und
- haben größere Schwierigkeiten mit Begriffen des Vorwissens.

Dass die Personen dieser Leistungsgruppe rein prozedural an Aufgabenbearbeitungen herangehen, ist angesichts fehlender Vorstellungen zum Ableitungsbegriff sicher nachvollziehbar. Zudem offenbaren sich einige Schwierigkeiten und Fehlkonzepte zu den Begriffen des Vorwissens, etwa zum Begriff der Tangente oder zum Funktionsbegriff, siehe Abschnitt 7.3.4. In einigen Fällen wird vermutlich zwischen der Ableitung in einem Punkt und der Ableitungsfunktion nicht klar getrennt.

Hält die erste Leistungsgruppe sehr stark an den graphischen Zugängen fest, so sind es in der dritten Gruppe die algorithmisch auszuführenden Prozeduren. Die Befragten sind auch dann, wenn die Ausrichtung einer Fragestellung deutlich konzeptuelle Züge hat, darauf fixiert ein algorithmisches Verfahren bzw. eine Prozedur zu finden.

Diese Einteilung in Leistungsgruppen lässt sich in ihren Grundzügen auch anhand der Aussagen der Schülerinnen und Schüler bestätigen, welche diese während der Bearbeitung der Mapping-Aufgaben getroffen haben. So trennt die Tatsache, dass zwischen der Ableitung in einem Punkt und der Ableitungsfunktion unterschieden werden kann, die erste Leistungsgruppe von allen übrigen Teilnehmern. In anderen Punkten deutet sich jedoch an, dass eine feinere Unterteilung der Leistungsgruppen zumindest zwei Schülerinnen eher gerecht werden könnte.

Auch die dritte Gruppe präsentiert sich bei den Mapping-Aufgaben insgesamt etwas besser als im vorangegangenen Teil des Interviews. Die geäußerten Vorstellungen bleiben dennoch vage. Defizite, die zuvor nur vermutet werden konnten, bestätigen sich in der Mehrzahl der Fälle.

3. Aufgabe

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an.

3a

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle x ist ein Maß dafür,

- ☐ welchen Wert die Funktion an dieser Stelle x hat.
- ☐ wie steil der Graph der Funktion an dieser Stelle x ist.
- ☐ wie krumm der Graph der Funktion an dieser Stelle x ist.
- ☐ wie viele Werte die Funktion an dieser Stelle x hat.
- ☐ ob der Funktionsgraph an dieser Stelle x einen positiven oder negativen Wert hat.

3b

Die Funktion $f(x)$ ist eine differenzierbare Funktion, die auf den reellen Zahlen definiert ist. An der Stelle $x = 2$ liefert sie den Funktionswert $f(2) = 4$. Auch die Ableitung ist hier $f'(2) = 4$.

Welche Annäherung an den Wert der Funktion an der Stelle $x = 2,001$ lässt sich aus den obigen Informationen gewinnen?

- ☐ $4 \cdot 0,001 = 0,004$
- ☐ $4 + 4 \cdot 0,001 = 4,004$
- ☐ $4 + 0,001 = 4,001$
- ☐ zwischen $4 - 0,001 = 3,999$ und $4 + 0,001 = 4,001$

Abbildung 7.5: Multiple Choice-Aufgabe aus dem Leistungstest

Geben Sie eine kurze Begründung an, warum die durchschnittliche Steigung der unterschiedlichen Graphen zwischen P und Q übereinstimmen muss.

Die durchschnittliche Steigung der versch. Graphen zwischen den Punkten P und Q muss übereinstimmen, weil alle Graphen regelmäßig sind. Ein Graph, der an einer Stelle eine besonders hohe positive Steigung hat, hat an einer anderen eine besonders hohe negative Steigung, sodass der Durchschnitt wieder weder besonders hoch noch besonders niedrig ist.

Abbildung 7.6: Beispiel einer typischen Bearbeitung

Geben Sie eine kurze Begründung an, warum die durchschnittliche Steigung der unterschiedlichen Graphen zwischen P und Q übereinstimmen muss.

Die durchschnittliche Steigung der Graphen ist die selbe, da man zwischen den beiden Punkten eine Sekante zur Berechnung einzeichnet. Die Steigung zwischen $(p|p)$ und $(q|q)$ ist also immer die selbe.

Abbildung 7.7: Beispiel einer der besseren Bearbeitungen

Interview-Fragen

1. Leiten Sie zu Beginn bitte diese Funktion ab.

[AB-Text: Leiten Sie zu Beginn bitte die Funktion f mit $f(x) = x^3$ ab.]

2. Bestimmen Sie nun den Wert der Ableitung für **diese** Funktion an der Stelle $x = 1$.

[AB-Text: Bestimmen Sie nun den Wert der Ableitung für die Funktion g mit $g(x) = 3x$ an der Stelle $x = 1$.]

Abbildung 7.8: Beispiele von Interviewfragen

RONJA

1. Leiten Sie zu Beginn bitte die Funktion f mit $f(x) = x^3$ ab.

$$f'(x) = 3x^2$$

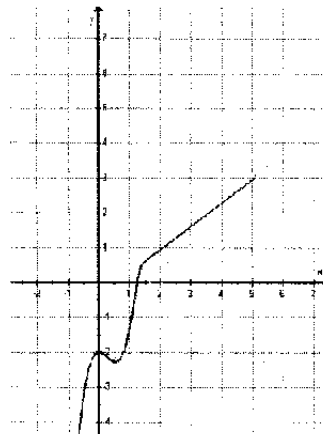
Abbildung 7.9: Typische schriftliche Antwort auf Frage 1

ISABELLA

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \rightarrow & x \\ 2x & \rightarrow & x \end{array}$$

Abbildung 7.10: Isabellas Vorschlag für verschiedene Funktionen mit identischer Ableitungsfunktion

4. Im Bild sehen Sie den Graphen einer differenzierbaren Funktion. Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion dazu als Skizze in das leere Koordinatensystem unten.



MARINA

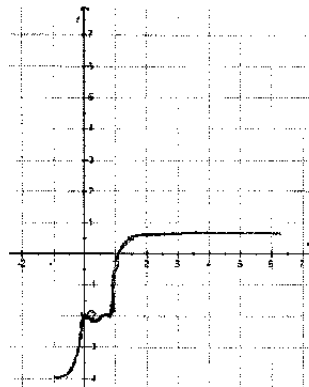


Abbildung 7.11: Arbeitsblatt zum graphischen Differenzieren, ausgefüllt von Marina

[AB-Text: **Erklären** Sie bitte nach Ihrem Verständnis, wie man von der Sekantensteigung ausgehend die Steigung des Funktionsgraphen im Punkt P bestimmt - siehe Zeichnung.]

AB-Bild:

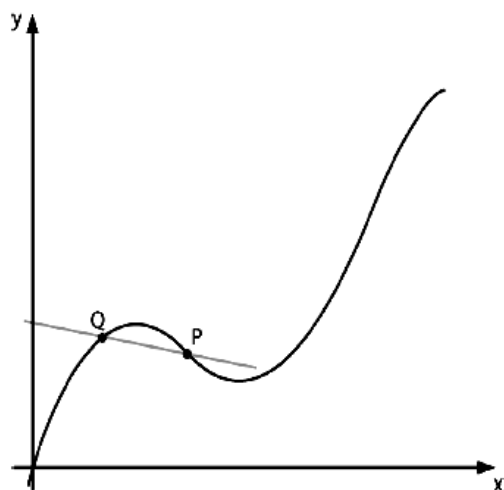


Abbildung 7.12: Interviewfrage 7 zur Interpretation der Ableitung als Steigung wie auch als Grenzwert

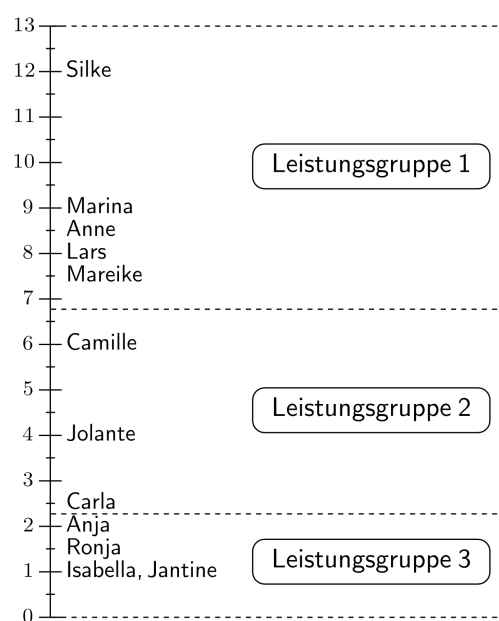


Abbildung 7.13: Anzahl richtiger Antworten für die einzelnen Personen

Ableitungsregel anwenden auf einen Punkt	direkte Anwendungen der Ableitung als Steigung		Grenzprozess beschreibbar	Nicht-Differenzierbarkeit erkennen		Eindeutigkeit der Tangente
Frage	2	3a,3b,3c,4	7	12	13	
Silke	X	X X X X	X	X	X	
Marina	X	X X X X	X			
Anne	X	X X(X)	X		X	
Lars	X	X X X	X			
Mareike	X	X X X X	X			
Camille		X X X			(X)	
Jolante	X	X X				
Carla		X X				
Anja		X				
Ronja		(X)				
Isabella						
Jantine						

Abbildung 7.14: Richtige Antworten nach Leistungsgruppen inhaltlich

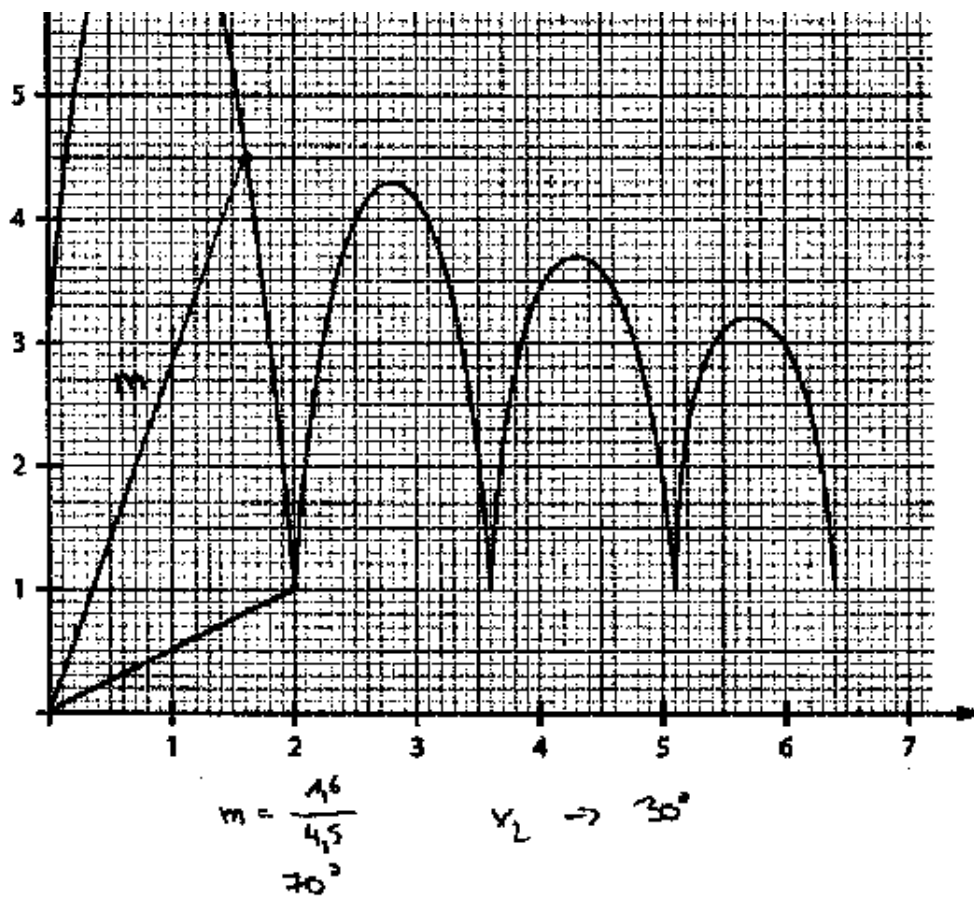


Abbildung 7.15: Isabellas Steigungsbestimmungen an $x = 1,6$ und $x = 2$

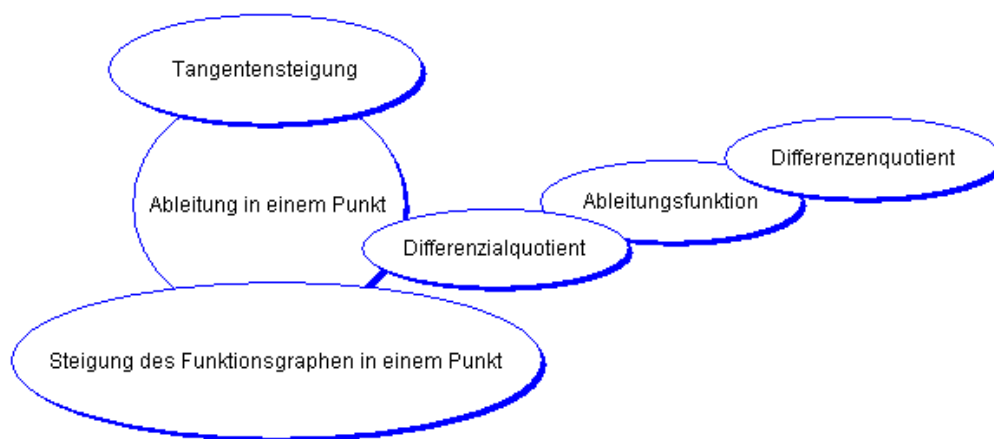


Abbildung 7.16: Lars' Map als Beispiel für die leistungsstärkste Gruppe

Kapitel 8

Diskussion und Ausblick

Es könnte' alles so einfach sein – isses aber nicht.

Die Fantastischen Vier.
Einfach sein, Album „Fornika“.

8.1 Diskussion der Ergebnisse

Im vorangegangenen Kapitel wurden zunächst die Ergebnisse aus dem Leistungstest und anschließend aus dem Interview vorgestellt. Während die Ergebnisse aus dem Leistungstest direkt in die Entwicklung der Interviewfragen eingegangen sind, wurden die Interviews nach verschiedenen Aspekten ausgewertet.¹² Zum ersten wurden dazu die Fragen genauer betrachtet und in Kategorien eingeteilt, woraufhin dann exemplarisch Antworten auf diese Fragen vorgestellt wurden und einen Eindruck von deren Qualität boten. Zum zweiten wurden die einzelnen Interviews genauer untersucht und Leistungsgruppen definiert, die anschließend charakterisiert wurden.

Hier wird nun die Bedeutung dieser Ergebnisse dargestellt. Dazu stellen sich insbesondere die folgenden Fragen:

- Inwieweit werden die Forschungshypothesen durch diese Ergebnisse gestützt?
- Sind die Befunde konsistent mit der in dieser Arbeit entwickelten Theorie und den bereits vorhandenen Forschungsergebnissen?
- Welche neuen Einsichten und welche Konsequenzen folgen aus den Ergebnissen?

¹²Insofern wurden die Tests bereits ausgewertet und interpretiert (siehe Abschnitt 7.1.4), sodass hier vorrangig die Ergebnisse der Interviews diskutiert werden.

In diesem Kapitel wird zunächst der direkte Bezug zu den Forschungshypothesen hergestellt sowie ein Vergleich mit älteren Forschungsergebnissen, wie sie in Kapitel 4 dargestellt wurden, unternommen. Am Ende folgt der Ausblick auf die Bedeutung dieser Ergebnisse für die Forschung und die Schulpraxis.

8.1.1 Prozedurales und konzeptuelles Wissen nach Leistungsgruppen

Im vorangegangenen Kapitel wurden drei Leistungsgruppen bestimmt. Diese Gruppen lassen sich in Bezug auf einige Fähigkeiten sehr klar kontrastieren.

Prozeduren des Differenzierens

Bereits in Abschnitt 7.2.1 wurde festgestellt, dass das symbolische Differenzieren elf von zwölf Personen gelang, es also nicht zwischen den Leistungsgruppen trennt. Demgegenüber wurde das graphische Differenzieren innerhalb der ersten Leistungsgruppe in erster Linie treffend erklärt aber weniger erfolgreich ausgeführt. In der zweiten Leistungsgruppe gab es immer noch einige Ansätze dazu, in der dritten führt nur eine Person die Prozedur durch, allerdings ohne Erklärungen zu geben. Das Differenzieren per Grenzwertbildung gelang schließlich überhaupt niemandem mehr.

Damit bestätigen diese Ergebnisse, die in Abschnitt 5.1.2 prognostizierte Hierarchie der Lösungsraten der Prozeduren (Forschungshypothese 1.1). Für das graphische Differenzieren bestätigen diese Ergebnisse darüber hinaus die Resultate, die Artigue (1991) in einer eigenen Studie erzielte und die in Abschnitt 4.3.1 bereits vorgestellt wurden. Ein Grund dafür mag, wie in Kapitel 7 bereits angeklungen, in dem vermehrten Anteil konzeptuellen Wissens vom symbolischen Differenzieren zum Differenzieren per Grenzwertbildung liegen. So bedarf es gegenüber dem symbolischen Differenzieren der Interpretation der Ableitung als Steigung.

Für den Differenzialquotienten besteht analog eine Abhängigkeit von der Vorstellung der Ableitung als Steigung und von der Interpretation als Grenzwert. Eine weitere Ursache liegt vermutlich, wie zuvor in Kapitel 7 angedeutet, in der geringeren Vertrautheit mit den anspruchsvolleren Verfahren. So werden diese Prozeduren im Unterricht üblicherweise weniger eingeübt, da zum einen mit dem symbolischen Differenzieren ein mächtiges Werkzeug des Differenzierens vorliegt und zudem das graphische Differenzieren nur zu einer angenäherten, weniger exakten Lösung führt.

Vorstellungen zum Ableitungsbegriff

Als wesentliche Vorstellungen zum Ableitungsbegriff sind die Vorstellung als momentane Steigung an einer Stelle des Funktionsgraphen bzw. die Tangentensteigung, das Verständnis der Ableitung als Grenzwert und die Änderungsrate zu nennen (siehe Abschnitt 4.2.1). In Tabelle 8.1, die die Tabellen 7.4, 7.5 und 7.6 zusammenfasst, sind diese Aspekte und die Vorwissensbegriffe „Differenzenquotient“ und „Steigungsdreieck“ aufgeführt. Für alle Befragten ist jeweils dann ein Kreuzchen gesetzt worden, wenn sie die angegebene Vorstellung bzw. den angegebenen Begriff im Interview zweifelsfrei explizit machen. Die Personen sind dabei in absteigender Reihenfolge nach der Anzahl richtig beantworteter Interviewfragen angegeben. Die Grenzen der Leistungsgruppen sind dabei durch horizontale Doppellinien gekennzeichnet.

Damit stellt die Tabelle in vereinfachter Weise zum einen die Vorstellungsgefüge¹³ der einzelnen Personen dar, zum anderen den Zusammenhang der Vorstellungen zur Anzahl korrekter Antworten im Interview. Dabei korrespondiert offensichtlich der Erfolg bei den Interviewfragen mit der Anzahl der Vorstellungen zum Ableitungsbegriff.

¹³Im Unterschied dazu beinhalten Begriffsnetze auch die Relationen. Das leistet diese Tabelle jedoch nicht, sondern nur die weiteren Ausführungen zu den Leistungsgruppen (siehe Kapitel 7).

Name	Differenzenquotient Steigungsdreieck		momentane Steigung Tangentensteigung		Grenzwert	Änderungsrate
Silke	x	x	x	x	x	x
Marina	-	x	x	x	x	x
Anne	x	x	x	x	x	x
Lars	x	x	x	x	x	-
Mareike	-	x	x	x	x	-
Camille	x	x	x	x	-	-
Jolante	-	-	-	x	-	-
Carla	-	-	x	-	-	-
Anja	-	-	-	-	-	-
Ronja	-	-	-	-	-	-
Isabella	-	-	-	-	-	-
Jantine	-	-	-	-	-	-

Tabelle 8.1: Übersicht zum konzeptuellen Wissen aller Interviewten

Wie der Tabelle 8.1 weiterhin zu entnehmen ist, dominiert über die Leistungsgruppen hinweg die Vorstellung der Ableitung als Steigung. Dieses Ergebnis geht damit konform mit dem in Abschnitt 4.3.1 dargestellten Resultat von Serhan (2006), die beim Leistungsvergleich zwischen einer traditionell und einer mit Computerunterstützung unterrichteten Lerngruppe für alle Teilnehmer die Interpretation der Ableitung als Steigung als dominant feststellen konnte. Für die erste Leistungsgruppe lässt sich neben der zentralen Interpretation der Ableitung als Steigung für alle Personen auch der Grenzwertbegriff feststellen. Dieser Punkt unterscheidet die Personen dieser Gruppe von allen übrigen.

Die Auswertung der Interviews ergibt außerdem, dass das konzeptuelle Wissen der Personen dieser Gruppe als sehr vernetzt bezeichnet werden kann. Diese Vernetzung zeigt sich z.B. im Wechsel zwischen den Repräsentationsformen oder in längeren Ausführungen zum Grenzprozess (siehe Abschnitt 7.3.2). Auch der spontan gebildete Begriff der Änderungsrate spricht für eine gute Vernetzung des konzeptuellen Wissens, denn um diesen Begriff zu entwickeln ist eine Abstraktion notwendig. Das bedeutet, dass die Schülerinnen zunächst andere Begriffe vergleichen und strukturelle Ähnlichkeiten feststellen müssen

um diesen Begriff der Änderungsrate erfassen zu können (siehe zum Zusammenhang von Vernetztheit und Transferierbarkeit von Wissen Abschnitt 3.2.1 und zur Bedeutung der Relationen Abschnitt 5.1.1).

Für die zweite Leistungsgruppe ist die Steigung die einzige stabile Interpretation der Ableitung. Mit Blick auf Tabelle 8.1 fällt allerdings auf, dass nur Camille sowohl über die Vorstellung der Tangentensteigung als auch der momentanen Steigung verfügt. Dieser Befund ist ein erster Hinweis darauf, dass die Begriffe, die sich die Personen dieser Leistungsgruppe erworben haben, recht isoliert vorliegen. Dies gilt auch für Camille, deren Vorstellungen nach Tabelle 8.1 zunächst reichhaltiger erscheinen. Tatsächlich belegt eine Passage aus dem Interview mit Camille (siehe Abschnitt 7.3.3), dass sie die Begriffe „Sekante“ und „Tangente“ nicht verbinden kann. Der Begriff des Grenzwerts könnte hier vermutlich zur Vernetzung dieser Begriffe beitragen, fehlt in dieser Leistungsgruppe jedoch vollkommen.

Diese Feststellungen stützen die These der Zentralität der „Steigung“ und des „Grenzwerts“ als Anschauungen der Ableitung (Forschungshypothese 1.2, siehe Abschnitt 5.1.2). Weiterhin deuten speziell die Ergebnisse der zweiten Leistungsgruppe in die Richtung, dass die beiden genannten Vorstellungen der Ableitung als Steigung und als Grenzwert die Basis für ein vernetztes konzeptuelles Wissen darstellen, welches sowohl nach dem in Abschnitt 3.2.1 dargestellten Modell der Wissensqualitäten als auch gemäß des in Abschnitt 3.2.3 vorgestellten „procept“-Konzepts ein Maß für Wissensqualität und damit eine Basis erfolgreicher Anwendung darstellt. Insofern gehen diese Ergebnisse mit der Prädiktor-Annahme der genannten Vorstellungen für den Erfolg bei den Antworten auf die Interviewfragen konform (Forschungshypothese 1.3). Jedoch steht damit nicht die einzig mögliche Erklärung für die erfolgreiche Beantwortung der Interviewfragen fest. Dazu sind zunächst noch die Rolle des Vorwissens und formaler Schreibweisen zu diskutieren.

8.1.2 Befunde zur formalen Schreibweise und zu Symbolen

Seitens der formalen Aspekte steht der Differenzialquotient im Zentrum der Betrachtungen, da er in seiner abkürzenden Schreibweise $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ sowohl für ein Objekt als auch für einen Prozess steht (siehe Abschnitt 4.2.1). Damit ist weder der Begriff noch die Formel leicht zu fassen. Allerdings zeigten sich auch an anderen Stellen Hindernisse im Zusammenhang mit der Symbolschreibweise, so dass sich insgesamt folgende Probleme identifizieren lassen:

- die fehlende Begriffsabgrenzung der Ableitung in einem Punkt von der Ableitungsfunktion,

- die Fehlinterpretation des Limes-Symbols als Ersetzung statt als Annäherung,
- die Fehlinterpretation der Stelle auf der Abszisse als Punkt des Graphen und
- die Fehlinterpretation der Formel für die durchschnittliche Steigung bzw. den Differenzenquotienten.

Die ersten drei genannten Punkte gehen dabei (unter anderem) offensichtlich auf unzureichende konzeptuelle Kenntnisse zurück. Im ersten Fall fehlt dabei die Abgrenzung des Begriffs der Ableitung in einem Punkt vom Begriff der Ableitungsfunktion (zu dieser Art von Fehlern siehe Abschnitt 2.3.1). Möglicherweise geht diese Schwierigkeit aber bereits auf vorangegangene formale Probleme mit dem Funktions- oder sogar Variablenbegriff zurück. Gerade in der dritten und schwächsten Leistungsgruppe sind Defizite im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff aufgetreten.

Das Problem mit dem Limes-Symbol tritt bei solchen Schülerinnen (Camille und Jantine) auf, die keinen expliziten Grenzwertbegriff zeigen. Das Pfeilsymbol wird möglicherweise mit dem für Funktionen in der Zuordnungsvorschrift üblichen Pfeil gleichgesetzt, etwa als $x \mapsto x_0$.

Das Symbol des Grenzwerts trägt in jedem Fall vielfältige Bedeutungen (siehe Abschnitt 4.2.1), allerdings in sehr komprimierter Form, so dass dadurch Verständnisprobleme möglicherweise noch verstärkt werden.

Beim Stelle-Punkt-Konflikt ist die Problematik möglicherweise eine ähnliche, da sowohl Stelle als auch Punkt durch ein aus nur einem Zeichen bestehenden Symbol abgekürzt werden. Davon hängt möglicherweise in der Folge auch die Fehlinterpretation des Differenzenquotienten ab, da der Nenner formal eine Differenz der Stellen angibt. Genauso kann allerdings die Formel bereits so komplex sein, dass eine ungeübte Person das Wesentliche nicht unmittelbar zu erfassen fähig ist.

Als Fazit lässt sich daher zum einen festhalten, dass nicht (nur) die Formelsprache Schwierigkeiten verursacht sondern oft konzeptuelle Defizite vorliegen. In der in Abschnitt 4.3.2 zitierten Studie von Sajka (2003) wird es so formuliert, dass die Gründe für ein Nicht-Verstehen oftmals im Begriff selbst liegen. Konzeptuelle Defizite werden dann durch die Formelsprache möglicherweise insofern verstärkt, als sie durch ihre verkürzte Darstellung eventuell Missverständnisse fördert, da sie Sachverhalte verdecken kann (siehe das Beispiel des Limes-Symbols). Insbesondere können formale Darstellungen an die Stelle konkreter Anschauungen treten und so verhindern, dass graphische Vorstellungen zurate gezogen werden.

Zum anderen kann eine formale Schreibweise auch ein starkes Instrument sein, wie im Fall von Jolante, siehe Abschnitt 7.3.3, die trotz fehlender Vorstellungen einige Interviewfragen beantworten konnte. Mit Hilfe ihrer formalen Fähigkeiten kann sie das Problem auf einige Bedingungen reduzieren und auf formalem Wege lösen.

Damit trifft Forschungshypothese 2.1, dass formale Schreibweisen nur dann produktiv genutzt werden können, wenn eine konzeptuelle Basis vorhanden ist, nur bedingt zu. Eine starke Verknüpfung zwischen Formeln und Prozeduren kann hier einen kompensatorischen Effekt haben.

Die Fragen, die in formaler Schreibweise verfasst waren (Fragen 10 und 11) wurden von keiner der befragten Personen richtig bearbeitet, wobei immerhin Silke gute Ansätze zeigte. Aufgabe 10 etwa, in der Fälle zu skizzieren waren, in denen $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ gilt, wäre auch über die formale Repräsentation lösbar gewesen. Dazu wird der Differenzenquotient einfach umgestellt bis schließlich $f(b) = f(a)$ geschrieben steht. Auf diesen Weg ist jedoch keine der Personen gestoßen. Eventuell fällt es den Schülern schwer die formale Repräsentation auf der Suche nach der Lösung überhaupt in die Überlegungen einzubeziehen, da das Ziel explizit eine graphische Darstellung ist. Möglicherweise ist dieses offenkundige Unvermögen mit verschiedenen Repräsentationsformen umzugehen nur ein Ausdruck der fehlenden Vernetzungen zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen. Dieser Befund würde dann daraufhin deuten, dass Forschungshypothese 2.2 zutrifft, nämlich dass umfangreiches und vernetztes konzeptuelles und prozedurales Wissen notwendig sind um formal dargestellte Aufgaben zu lösen.

So kann Forschungshypothese 2.2 aber nicht zweifelsfrei bestätigt werden, da dazu zu wenig formale Kenntnisse in den Interviews gezeigt wurden.

8.1.3 Befunde zum Vorwissen

Wider Erwarten zeigt sich beim Vorwissen, dass die Interviewten teils recht schwache Begriffe von der „durchschnittlichen Steigung“ oder dem „Differenzenquotienten“ aufweisen. Schon der recht alltäglich erscheinende Begriff des Durchschnitts bereitet einigen Schülern Probleme, siehe Abschnitte 7.2.4 und 7.3.

Die Hypothese (Forschungshypothese 3.1), dass Vorwissensbegriffe die Einbindung neuer Begriffe, Vorstellungen und Prozeduren fördern, kann nicht als absolut gelten. So können die Vorstellung einer Steigung in einem Punkt und die Idee, dass es nur für Intervalle Steigungen gibt, mögen sie auch winzig klein sein, völlig unverbunden nebeneinander stehen (siehe das Profil von Carla, Abschnitt 7.3.3) .

Tatsächlich fehlten gelegentlich begriffliche Abgrenzungen (Forschungshypothese 3.2). Dabei handelt es sich unter anderem um die schon in Abschnitt 8.1.2 erwähnte, fehlende Unterscheidung zwischen der Ableitung in einem Punkt und der Ableitungsfunktion. In einem Fall wurde auch zwischen der Sekante und der Tangente nicht unterschieden. Eine Besonderheit stellt die Verwechslung der Begriffsnamen „Differenzenquotient“ und „Differenzialquotient“ dar. Dieses Problem trat nicht nur sehr häufig auf, es hat zudem eine andere Qualität, da die Begriffe inhaltlich recht klar verstanden sind und nur die Anbindung an den Begriffsnamen eigentümlicherweise fehlt. Vermutlich sind sich beide Bezeichnungen zu ähnlich.

8.1.4 Grenzen der Methode

Wie schon im Abschnitt 8.1.2 angedeutet, gab es einzelne Fragen im Interview, die sich als weniger geeignet erwiesen. Diese Fragen wurden kaum oder gar nicht beantwortet und hatten so nur einen geringen Wert für die Auswertung. Als aufschlussreich können dagegen insbesondere die Fragen zum Aspekt des graphischen Differenzierens und zum Grenzprozess angesehen werden. Auch generell hat sich das Interview zum Zwecke der genaueren Untersuchung der Vorstellungen als Methode bewährt. In der Kombination mit der Methode des Concept Mappings konnten sprachliche Schwierigkeiten abgefangen werden. Fehlende Begriffsnamen oder bis dahin nicht explizit gemachte Vorstellungen konnten so ergänzt werden. Insbesondere Mareike sei hier genannt, die während der Bearbeitung nur schwer zu Erklärungen zu bewegen war, legte hier nun doch umfangreiches konzeptuelles Wissen offen.

Dennoch ist natürlich nicht auszuschließen, dass weitere Vorstellungen vorhanden sind, die trotz einer Methodentriangulation nicht offensichtlich werden.

8.2 Ausblick

8.2.1 Erklärungsansätze mathematischer Kompetenz

Zusammenfassend sind die Forschungshypothesen aus Abschnitt 5.1.2 mit Einschränkungen für die Hypothesen 2.2 und 3.1 für die Teilnehmer dieser Untersuchung recht deutlich bestätigt worden. Insbesondere bedeutet das, dass die zuvor theoretisch herausgearbeiteten Qualitätskriterien für prozedurales und konzeptuelles Wissen Gültigkeit haben und die Vernetzung zwischen prozeduralen und konzeptuellen Wissensinhalten, sowie die Möglichkeit zwischen verschiedenen Repräsentationsformen hin- und herwechseln zu können von zentraler Bedeutung sind.

Eine besondere Rolle scheint in diesem Zusammenhang die graphische Repräsentation zu spielen. So haben alle Personen der stärksten Leistungsgruppe vorrangig einen graphischen Zugang zur jeweiligen Aufgabe gesucht. Eng damit verbunden ist die Deutung der Ableitung als Steigung.

Die Verbindungen zwischen den Begriffen Sekante und Tangente, Differenzen- und Differenzialquotient usw. führen über den Grenzwertbegriff. Somit liegt nahe, dass dieser Begriff für die Vernetzung der weiteren Begriffe und Vorstellungen eine wichtige Rolle spielt. Wie zuvor ausgeführt (siehe Abschnitt 8.1), deuten auch die Unterschiede zwischen den ersten beiden Leistungsgruppen auf einen solchen Zusammenhang zwischen einem adäquaten Grenzwertbegriff und der Vernetzung der Vorstellungen hin.

Zusätzliche Erkenntnisse lassen sich aus den Profilen einzelner Personen ableiten, die sich durch besondere Merkmale von ihren Leistungsgruppen absetzen. Zu diesen Personen zählt zunächst einmal Silke, die sich noch einmal deutlich durch ihre umfangreicheren Fähigkeiten von den übrigen in der ersten Leistungsgruppe absetzt. Auffällig an ihrer Charakteristik ist gegenüber der Gruppe ihre formale Stärke. Ob dies allerdings der entscheidende Punkt ist, kann nur vermutet und anhand dieses Einzelfalls nicht mit Sicherheit gesagt werden. Es spricht allerdings ein weiteres Argument dafür, nämlich die schon erwähnte Möglichkeit konzeptuelle Defizite durch formale Stärke auszugleichen. Dies trifft auf Jolante zu, die gegenüber den anderen Personen der zweiten Leistungsgruppe, zunächst bezogen auf das konzeptuelle Wissen, im Nachteil zu sein scheint, da sie die Ableitung zwar mit der Steigung in Zusammenhang bringt aber nicht sicher damit identifizieren kann. Einige Fragen kann Jolante aber auf rein formaler Ebene souverän beantworten.

8.2.2 Konsequenzen für die Unterrichtspraxis

Zu den wichtigsten Ergebnissen für die Praxis zählen

- die Bedeutung der graphischen Sichtweise (und damit auch die Anschauung als Steigung),
- der Kompensationseffekt zwischen Vorstellungen und formalen Fähigkeiten und
- die Erfordernis, die Begriffe „Differenzenquotient“ und „durchschnittliche Steigung“ ausführlicher zu behandeln.

Von einigen schwächeren Schülern wird sehr stark der rechnerische Aspekt hervorgehoben bzw. im Fall des graphischen Differenzierens gesucht. Dies deutet bezogen auf den Unterricht auf eine starke Betonung der Rechnungen zum

Nachteil graphischer Aspekte hin. Im Sinne der Procept-Theorie (siehe Abschnitt 3.2.3) sind die reinen Prozeduren zwar der Ausgangspunkt der Entwicklung eines flexibel einsetzbaren Begriffs, jedoch sind auf dieser Stufe noch keine Probleme zu lösen. Insofern ist dafür zu plädieren auch dem graphischen Aspekt im Unterricht mehr Bedeutung beizumessen, etwa indem auch das graphische Differenzieren behandelt wird.

Dass ein eher ausgewogenes Verhältnis zwischen graphischen und rechnerischen Aspekten bzw. unterschiedlichen Repräsentationsformen hergestellt wird, ist noch aus einem anderen Grund wichtig. Bei Betrachtung der Aussagen im Profil der dritten Leistungsgruppe, entsteht gelegentlich der Eindruck eines eingeschränkten Bildes von der Mathematik. So wird argumentiert, dass es nicht möglich sei sich etwas vorzustellen, da es noch nicht einmal etwas zu rechnen gäbe. Überhaupt wird auch bei den konzeptuell ausgerichteten Fragen von dieser Leistungsgruppe durchgängig nach Algorithmen und Rechenregeln gesucht. Somit scheinen diese Schülerinnen und Schüler den Vorstellungen keinen eigenen Wert neben den Prozeduren beizumessen; Mathematik beschränkt sich auf (algorithmisches) Rechnen.

Zum Effekt der Kompensation ist anzumerken, dass dieser nicht unbedingt dem Ideal entspricht. Wünschenswert ist eher ein bedeutungsvolles Lernen der Formeln und Symbole. Bezogen auf diesen Punkt deuten die Ergebnisse dieser Studie (siehe Abschnitt 8.1.2) darauf hin, dass Schwierigkeiten nicht zwingend in Symbolen oder Formeln begründet liegen müssen. Sie legen aber auch nahe zunächst eine gute konzeptuelle Basis zu schaffen, auf der dann behutsam formale Schreibweisen eingeführt werden.

Schließlich kann aufgrund der Ergebnisse auch für eine stärkere Berücksichtigung des Vorwissens plädiert werden. Zum einen sind die Defizite im Wissen um den Funktionsbegriff oder den Differenzenquotienten eine Tatsache, so dass hier Nachbesserungsbedarf bei diesen Begriffen besteht. Dies gilt umso mehr als nach Malle (2003) die Vorstellungen zum Differenzenquotienten mit denen zum Differenzialquotienten weitgehend übereinstimmen (siehe Abschnitt 4.3.2).

Zum anderen wird ohne eine entsprechende Würdigung des Vorwissens die Chance vertan, dies fruchtbar zu nutzen, vgl. Abschnitt 2.2. Ein solcher Fall liegt hier beispielsweise bei Carla vor (siehe Abschnitt 7.3.3), die intuitiv die Idee hat, dass ein Punkt als solches keine Steigung habe, sondern immer „schon ein wenig mehr“ betrachtet werde. Mit den nicht-differenzierbaren Stellen eines Graphen konfrontiert äußert sie aber, dass sie „gelernt“ habe, dass sich die Richtung an diesen Stellen umkehrt. Verstanden wurde dieser Punkt aber offenbar nicht. Die Frage drängt sich auf, warum die Schülerin nicht im Unterricht an dieser Stelle nachgefragt hat und somit diesen ungelösten Konflikt

weiterträgt. Diese Problematik jedoch wirft bereits generelle Fragen der Unterrichtskultur und nicht allein des Mathematikunterrichts auf.

8.2.3 Bedeutung für die didaktische Forschung

Ziel der Studie war es Bedingungen zu untersuchen, die einen kompetenten Umgang mit dem Begriff der Ableitung und angrenzenden Begriffen ermöglichen und fördern. Dies ist insofern gelungen, als recht klare Profile von Leistungsgruppen erstellt werden konnten, die diese Bedingungen beschreiben. Zudem konnten die früheren Ergebnisse empirischer Untersuchungen, wie etwa Artigue (1991) und Fraunholz (1992) zur Bedeutsamkeit der graphischen Sicht oder etwa Malle (1999, 2003) zu den Grundvorstellungen zum Differenzen- und Differenzialquotienten bestätigt werden (siehe Abschnitt 4.2.1 zu den früheren Ergebnissen).

Wie bereits Malle (1999, 2003) bemängelte, wird der Differenzenquotient offensichtlich nach wie vor zu wenig berücksichtigt. Ob es weniger Schwierigkeiten beim Aufstellen des Differenzialquotienten gäbe, dieser vielleicht auch besser erinnert würde, wenn ein stabiler Begriff des Differenzenquotienten vorliegt, lässt sich an dieser Stelle jedoch nur vermuten.

Nicht geklärt werden konnte dagegen in diesem Rahmen, wie die beschriebenen Voraussetzungen bei den Schülerinnen und Schülern zustande kamen bzw. warum eben gerade nicht. Aus der Perspektive der Forschung sind weiterhin besonders die Fälle interessant, die nicht prototypisch für ihre Leistungsgruppe stehen. Das heißt, dass insbesondere der hier aufgetretene Kompensationseffekt interessant ist und Anlass zu weiterer Forschung bietet.

Insgesamt sind die hier erzielten Ergebnisse zu den konzeptuellen Bedingungsrahmen für das erfolgreiche Anwenden in der Differenzialrechnung recht deutlich und kontrastieren die unterschiedlichen Leistungsgruppen klar. Wünschenswert wäre sicherlich Methoden zu gewinnen, die diese Ergebnisse für größere Stichproben zu replizieren erlauben. Auch eine Intervention, die stärker auf die Entwicklung der Vorstellungen abzielt, wäre ein lohnender Ansatzpunkt.

Literaturverzeichnis

- Abelson, R., 1976. Script processing in attitude formation and decision making. *Cognition and social behavior*, 33 – 45.
- Anderson, J. R., 1983. *The architecture of cognition*. Cambridge: Harvard University Press.
- Anderson, J. R., 1996. *Kognitive Psychologie*. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag GmbH.
- Artigue, M., 1991. Analysis. In D. Tall, Hrsg., *Advanced Mathematical Thinking*, Ort: Kluwer Academic Publishers, 167 – 198.
- Asiala, M.; Cottrill, J. & Dubinsky, E., 1997. The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behaviour*, 16 (4), 399 – 431.
- Bayern, F., 1990. *Fachlehrplan für Mathematik*.
URL <http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?downloadFileID=8f5923b1fc79324526de7441680baacc>[08.10.2007]
- Biza, I. & Zachariades, T., 2005. First year university students and their intuitive knowledge about tangent line. *ICTM* 3, 3, 5.
- Blum, W. & Kirsch, A., 1996. Die beiden Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. *Mathematik Lehren*, 78, 60 – 65.
- Bonato, M., 1990. *Wissensstrukturierung mittels Struktur-Lege-Techniken – Eine graphentheoretische Analyse von Wissensnetzen*. Frankfurt: P. Lang Verlag, 7th Aufl..
- Bortz, J. & Döring, N., 2005. *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler*. Springer, 3rd Aufl..
- Bronfenbrenner, U., 1979. *The ecology of human development - experiments by nature and design*. Cambridge und London: Harvard University Press.

- Caravita, S. & Halldén, O., 1994. Re-framing the problem of conceptual change. *Learning and instruction*, 4, 89 – 111.
- Castro-Filho, J.; Wilhelm, J. & Confrey, J., 2005. Understanding rate of change using motion detectors: one teacher's voice, perspective and growth. *International Journal for Mathematics teaching and learning*, platzhalter, platzhalter.
URL [http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/\[29.09.2006\]](http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/[29.09.2006])
- Chi, T.; Slotta, J. & de Leeuw, N., 1994. From things to processes: a theory of conceptual change for learningscience concepts. *Learning and Instruction*, 4, 27 – 43.
- Collins, A. & M.R., Q., 1969. Retrieval time from semantic memory. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behaviour*, 8, 240 – 247.
- Cottrill, J.; Dubinsky, E.; Nichols, D.; Schwingendorf, K.; Thomas, K. & Vidakovic, D., 1996. Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process scheme. *Journal of mathematical behavior*, 15, 167 – 192.
- Delius, C. e. a., 2005. *Geschichte der Philosophie - Von der Antike bis heute*. Tandem Verlag.
- Duit, R., 1996. *Lernen in den Naturwissenschaften, Beiträge zu einem Workshop an der PH Ludwigsburg*, Kap. Lernen als Konzeptwechsel im naturwissenschaftlichen Unterricht. IPN Kiel, 145 – 162.
- Edelmann, W., 2000. *Lernpsychologie*, vol. 6. Aufl. Weinheim: Beltz.
- Eisenberg, T., 1991. *Advanced mathematical thinking*, Kap. Functions and associated learning difficulties. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 140 – 152.
- Engelbrecht, J.; Harding, A. & Potgieter, M., 2000. Undergrate students' performance and confidence in procedural and conceptual mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36 (7), 701 – 712.
- Fraunholz, W., 1992. Mathematische Begriffe interaktiv visualisieren. *Mathematik lehren*, platzhalter, 55 – 56.
- Giraldo, C. L. M. . T. D. O., V., 2003. Descriptions and Definitions in the Teaching of Elementary Calculus. In B. D. N.A. Pateman & J. Zilliox, Hrsg., *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*, vol. 2, Honolulu, USA., pp.445–452.

- Giraldo, V. & Carvalho, L. M., 2005. Computational descriptions and the development of the concept of derivative. In *CERME 4 proceedings 2005*.
- Gray, E. & Tall, D., 1992. Success and failure in mathematics: The flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching*, 142, 6 – 10.
- Gray, E. & Tall, D., 2001. Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. In *Proceedings of PME*, 65 – 72.
- Haapasalo, L. & Kadijevich, D., 2000. Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal für Mathematikdidaktik*, 21, 139 – 157.
- Halldén, O., 1999. *New perspectives on conceptual change*, Kap. 4 Conceptual change and contextualization. Pergamon, 53 – 65.
- Hasemann, K. & Mansfield, H., 1995. Concept Mapping in Research on Mathematical Knowledge Development: Background, Methods, Findings and Conclusions. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 45 – 72.
- Hasselhorn, M., 2001. Metakognition. In D. H. Rost, Hrsg., *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie*, Weinheim: Beltz, 466 – 471.
- Hausmann, K. & Reiss, M., 1990. Deklarative Wissensdiagnostik im Bereich rekursiven Denkens. In K. Hausmann & M. Reiss, Hrsg., *Mathematische Lehr-Lern-Denkprozesse*, Göttingen: Verlag für Psychologie Dr. C. J. Hogrefe, 131 – 150.
- Heinze, A., 2004. Zum Umgang mit Fehlern im Unterrichtsgespräch der Sekundarstufe I - Theoretische Grundlegung, Methode und Ergebnisse einer Video-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 4, 221 – 244.
- Hähkiöniemi, M., 2005. Is there a limit in the derivative? – Exploring students' understanding of the limit of the difference quotient. *CERME 4, proceedings 2005*, 4, 1 – 10.
- Hiebert, J. & Lefevre, P., 1986. Conceptual and procedural knowledge in Mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert, Hrsg., *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*, Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hilbert, A., 1998. *Mathematik - Grundlagenwissen*. Bechtermünz Verlag.

- vom Hofe, R., 1998. Probleme mit dem Grenzwert: Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse - Eine Fallstudie aus dem computergestützten Analysisunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik*, 4, 257 – 291.
- IQSH, 2002. *Lehrplan für die Sekundarstufe II, Gymnasium, Gesamtschule, Mathematik*. Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein (IQSH), glückstadt: glückstädter werkstätten Aufl.
URL <http://www.lehrplan.lernnetz.de> [24.05.2008]
- Jüngst, K. L. & Strittmatter, P., 1995. Wissensstrukturdarstellung: Theoretische Ansätze und praktische Relevanz. *Unterrichtswissenschaft*, 23(3), 194 – 297.
- de Jong, T. & Ferguson-Hessler, M. G. M., 1996. Types and qualities of knowledge. *Educational Psychologist*, 31 (2), 105 – 113.
- Jung, R. D. W. & Pfundt, H., Hrsg., 1981. *Alltagsvorstellungen und naturwissenschaftlicher Unterricht*. Köln: Aulis Verlag Deubner Co KG.
- Krivsky, S., 2003. *Multimediale Lernumgebungen in der Mathematik - Konzeption, Entwicklung und Erprobung des Projekts Matheprisma*. Franzbecker, Hildesheim, Berlin.
- Kuhn, T. S., 1962. *Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen*. Suhrkamp.
- Kultusministerium, H., 2002. *Lehrplan Mathematik*. Hessisches Kultusministerium.
URL http://download.bildung.hessen.de/unterricht/lernarchiv/lehrplaene/gymnasium_g9/mathematik_g9/LPGymMathe.pdf [08.10.2007]
- Lamnek, S., 2005. *Qualitative Sozialforschung*. Weinheim, Basel: Beltz PVU, 4th Aufl..
- Maichle, U., 1981. Beiträge der kognitiven Psychologie zur Analyse von Vorstellungen. In R. Duit; W. Jung & H. Pfundt, Hrsg., *Alltagsvorstellungen und naturwissenschaftlicher Unterricht*, Köln: Aulis Verlag Deubner CoKG, 25 – 64.
- Malle, G., 1999. Grundvorstellungen zum Differenzen- und Differenzialquotient. In *Didaktik-Reihe der ÖMG 30*, ÖMG.
- Malle, G., 2003. Vorstellungen vom Differenzenquotienten fördern. *Mathematik lehren*, 118, 57 – 62.

- Mandl, H. & Fischer, F., Hrsg., 2000. *Wissen sichtbar machen*. Göttingen, Hogrefe.
- Mandl, H.; Friedrich, H. F. & Hron, A., 1988. Theoretische Ansätze zum Wissenserwerb. In H. Mandl & H. Spada, Hrsg., *Wissenspsychologie*, Psychologie Verlags Union, 123 – 159.
- Meier-Rust, K., 2002. Vom Nutzen der Schande beim Fehlermachen. *Neue Zürcher Zeitung (NZZ) am Sonntag, Ressort Wissen*, platzhalter, platzhalter. URL http://www.kzu.ch/info/info_teachers/pae/03_fehler.htm[22.01.2007]
- Mietzel, G., 2007. *Pädagogische Psychologie des Lernens und Lehrens*. Göttingen: Hogrefe Verlag.
- NCTM, 2000. *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.
- Newell, A. & Simon, H. A., 1972. *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Niedersachsen, R. R., 1991. *Rahmenrichtlinien (RRL) für Niedersachsen, Gymnasiale Oberstufe*. Niedersächsisches Kultusministerium.
- Niedersachsen, R. R., 2006. *Niedersächsisches Kerncurriculum*. Niedersächsisches Kultusministerium.
- NYS-Board, 2005. *Learning Standards for Mathematics*. New York State Education Department.
- Oberauer, U. K. R., K.; Mayr, 2006. *Lehrbuch Allgemeine Psychologie*. Bern: Huber, 3rd Aufl..
- Orhun, N., 2005. Evaluation of 11th grade students' cognitive behaviour on some subjects of analysis according to gender. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36 (4), 399 – 405.
- Orton, A., 1983. Students' understanding of differentiation. *Educational studies in mathematics*, 14 (3), 235 – 250.
- Osherson, D. & Smith, E., 1982. Gradeness and conceptual combination. *Cognition*, 12, 299 – 318.
- Piaget, J., 1968. *Die Entwicklung des Denkens*. Frankfurt am Main: Fischer.
- Piaget, J., 1983. *Meine Theorie der geistigen Entwicklung*. Fischer Taschenbuch Verlag.

- Pintrich, P. R. & Schunk, D. H., 2002. *Motivation in Education*. New Jersey: Pearson Education.
- Plötzner, R.; Beller, S. & Härder, J., 2000. *Wissen sichtbar machen*, Kap. Wissensvermittlung, tutoriell unterstützte Wissensanwendung und Wissensdiagnose mit Begriffsnetzen. Göttingen, Hogrefe, 180 – 198.
- Prechtel, P., Hrsg., 1999. *Philosophie-Lexikon*.
- Renkl, A., 1996. Träges Wissen: Wenn Erlerntes nicht genutzt wird. *Psychologische Rundschau*, 47, 78 – 92.
- Richter, T.; Naumann, M., J; Brunner & Christmann, U., 2005. Strategische Verarbeitung beim Lernen mit Text und Hypertext. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, 19, 5 – 22.
- Rittle-Johnson, B.; Siegler, R. S. & Alibali, M. W., 2001. Developing conceptual understanding and procedural skill in Mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93 (2), 346 – 362.
- Rumelhart, V. E. & Norman, D. A., 1978. Accretion, tuning, and restructuring: Three models of learning. In J. Cotton & R. Klatzky, Hrsg., *Semantic factors in cognition.*, Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sajka, M., 2003. A secondary school student's understanding of the concept of function - a case study. *Educational studies in mathematics*, 53, 229 – 254.
- Schneider, M., 2006. *Konzeptuelles und prozedurales Wissen als latente Variablen: Ihre Interaktion beim Lernen mit Dezimalbrüchen*. Ph.D. thesis, TU Berlin.
URL <http://deposit.dnb.de/cgi-bin/dokserv?idn=978818768> [26.09.2006]
- Schnell, R.; Hill, P. B. & Eser, E., 2005. *Methoden der empirischen Sozialforschung*. München, Wien: R. Oldenbourg Verlag, 7th Aufl..
- Schnotz, W., 1996. *Lernen in den Naturwissenschaften - Beiträge zu einem Workshop an der PH Ludwigsburg*, Kap. Psychologische Ansätze des Wissenserwerbs und der Wissensänderung. IPN Kiel, 15 – 36.
- Serhan, D., 2006. The effect of graphing calculators use on students' understanding of the derivative at a point. *International Journal for Mathematics teaching and learning*, platzhalter, platzhalter.
URL <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/serhan.pdf> [08.10.2007]

- Sodian, B., 2002. *Entwicklungspsychologie*, Kap. Entwicklung begrifflichen Wissens. Weinheim: Beltz PVU, 443 – 468.
- Stark, R., 2002. Conceptual change: kognitivistisch oder kontextualistisch? (Forschungsbericht). Tech. Rep., LMU München, Institut für Pädagogische Psychologie und Empirische Pädagogik.
URL http://epub.ub.uni-muenchen.de/archive/00000257/01/FB_149.pdf [22.01.2006]
- Steiner, G., 2001. Lernen und Wissenserwerb. In *Pädagogische Psychologie*, Weinheim: Beltz, 137 – 205.
- Stry, Y. & Schwenkert, R., 2006. *Mathematik kompakt - für Ingenieure und Informatiker*. Heidelberg: Springer.
- Tergan, S. O., 2005. Concept maps & e-Learning. *e-teaching.org*, 1 – 11.
- Tietze, U.-P.; Klika, M. & Wolpers, H., 1982. *Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II*. Braunschweig: Verlag Friedrich Vieweg & Sohn.
- Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S., 2004. Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction. The Journal of the European Association for Research on Learning and Instruction*, 14, 453 – 467.
- Volk, O., 1995. *Mathematik und Erkenntnis*. Würzburg: Königshausen & Neumann.
- Vollrath, H.-J., 1999. *Algebra in der Sekundarstufe*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin.
- Vosniadou, S., 1994. Capturing and modeling the process of conceptual change. *Learning and Instruction. The Journal of the European Association for Research on Learning and Instruction*, 4, 45 – 69.
- Vosniadou, S. & Verschaffel, L., 2004. Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction: The Journal of the European Association for Research on Learning and Instruction*, 14, 445 – 451.
- Weigand, H. G., 1993. *Zur Didaktik des Folgenbegriffs*. Mannheim: B. I. Wissenschaftsverlag.

Wiedemann, U., 2006.

URL <http://www.phillex.de> [08.10.2007]

Wong, B. D.; Kirchgraber, U.; Schönenberger-Deuel, J. & Zogg, D., 2003. *Differenzieren - Do it yourself*. Zürich: Orell Füssli Verlag.

Wottawa, H. & Thierau, H., 1990. *Evaluation*. Bern, Stuttgart, Toronto: Huber Verlag.

von Wright, G. H., 1974. *causality and determinism*. New York und London: Columbia University Press.

Zimbardo, P. G. & Gerrig, R. J., 2003. *Psychologie*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

Index

- Ableitung, 48–51
 - in einem Punkt, 51, 63
- Ableitungsfunktion, 51, 52
- Akkommodation, 18
- Arbeitsgedächtnis, 10
- Assimilation, 18
- Begriff, 1
 - Inhalt des Begriffs, 2
 - Name des Begriffs, 2
 - Oberbegriff, 3
 - Umfang des Begriffs, 2
 - Unterbegriff, 3
- Begriffsbildung, 1, 3
- Begriffsnetz, 3, 41
- Begriffsverständnis
 - formales, 41
 - inhaltliches, 41
 - integriertes, 41
 - intuitives, 41
 - kritisches, 42
- Begriffsverständnis, 4, 41
- Begriffswissen, *siehe* Begriffsverständnis
- Bilder
 - mentale, 9
- Chunk, 10
- Conceptual Change, 19
 - Rahmentheorieansatz des, 25
- Differenzenquotient, 51, 52
- Differenzialrechnung, 45
- Fehler, 25–27
 - forschung, 28
 - korrektur, 28
 - vermeidung, 28
 - Fehlkonzept, *siehe* Fehlvorstellung
 - Fehlvorstellung, 25, 28
- Gedächtnis
 - Arbeitsgedächtnis, 33
 - deklaratives, 33
 - Langzeitgedächtnis, 33
 - prozedurales, 33
- Grenzwert, 51, 52
 - der Folge, 46
- Grundfähigkeiten, 59
- Grundvorstellungen, 59
- Interview, 76
 - leitfaden, 69
 - fokussiertes, 69, 80
 - narratives, 69, 80
 - offenes, 69
 - standardisiertes, 69
- Kontrollwissen, 33
- Lehrplan, 51
- Leistungstest, 68
- Lernen
 - additiv, 20
 - kumulativ, 20
- Mapping-Techniken, 70

- Concept Map, 70
 - Mind Map, 70
- Mathematikunterricht, 52
- Merkmalsanalyse, 8
- Mustervergleich, 18
- Phonemergänzungseffekt, 10
- Problemlösen, 35, 38
- Proposition, 9
- Prototypentheorie, 6
- Reflexion, 36, 38
- Reiz, 7
- Relation, 9
- Repräsentation, 5, 8
 - analoge, 9
 - propositionale, *siehe* Proposition
- Schablonenabgleich, 8
- Schema, 16
- Schemaerwerb, 4
- situational knowledge, 34
- Skript, 16
- Standardisierung, 69
- Steigung
 - der Tangente, 47, 52
 - des Graphen, 47, 52
- Steuerungswissen, 33
- Strategiewissen, 34
- Tangente, 46
- Tangentenproblem, 46
- Wissen
 - begriffliches, 31
 - deklaratives, 31–36
 - inkonsistentes, 26, 27
 - konzeptuelles, 31–43
 - metakognitives, 37
 - metakognitives Wissen, 35
 - negatives, 28
 - prozedurales, 31–43
 - träges, 26
- Wissensqualität, 37, 38
- Wortüberlegenheitseffekt, 10
- Änderungsrate, 47, 52
 - momentane, 47

Abbildungsverzeichnis

1.1	Mengendiagramm für Vierecksarten, angelehnt an Hilbert (1998, S. 430)	3
2.1	Unbedachtes Schema zum Lösen von Textaufgaben	16
2.2	Beispielhafter Ausschnitt eines Kategorisierungsschemas	24
3.1	Modell der Interaktion von Sensorischem, Arbeits- und Langzeitgedächtnis	34
5.1	Beispiel: Verbindung der Anschauungen der Ableitung als Steigung und der Geschwindigkeit als spezieller Änderungsrate . . .	63
6.1	Zeitlicher Verlauf der Studie	76
6.2	Offene Aufgabe aus dem Leistungstest	78
6.3	Weitere offene Aufgabe aus dem Leistungstest	79
6.4	Geschlossene (Zuordnungs-)Aufgabe aus dem Leistungstest . . .	79
6.5	Beispielfrage aus dem Interview	81
6.6	Zeichenaufgabe aus dem Fragenkatalog des Interviews	82
6.7	Aufgabe des Interviews zum graphischen Differenzieren	84
7.1	Verteilung der Summenscores im Leistungstest	90
7.2	Aufgabe aus dem Leistungstest	92
7.3	Durchschnittlich erreichte Punktzahlen nach Aufgaben	94
7.4	Aufgabe des Leistungstests zum symbolischen Differenzieren . .	95
7.17	Jolantes Map zur 1. Mapping-Aufgabe	135
7.18	Ronjas Map zur 2. Mapping-Aufgabe	136
7.5	Multiple Choice-Aufgabe aus dem Leistungstest	141
7.6	Beispiel einer typischen Bearbeitung	142
7.7	Beispiel einer der besseren Bearbeitungen	142
7.8	Beispiele von Interviewfragen	143
7.9	Typische schriftliche Antwort auf Frage 1	143
7.10	Isabellas Vorschlag für verschiedene Funktionen mit identischer Ableitungsfunktion	143

7.11	Arbeitsblatt zum graphischen Differenzieren, ausgefüllt von Marina	144
7.12	Interviewfrage 7 zur Interpretation der Ableitung als Steigung wie auch als Grenzwert	145
7.13	Anzahl richtiger Antworten für die einzelnen Personen	145
7.14	Richtige Antworten nach Leistungsgruppen inhaltlich	146
7.15	Isabellas Steigungsbestimmungen an $x = 1,6$ und $x = 2$	147
7.16	Lars' Map als Beispiel für die leistungsstärkste Gruppe	148

Tabellenverzeichnis

2.1	Bedingungen eines erfolgreichen Conceptual Change (vgl. Duit, 1996, S. 150)	21
3.1	Wissen in Abhängigkeit von Wissensform und -qualität (übersetzter Ausschnitt aus de Jong und Ferguson-Hessler (1996)). . .	39
3.2	Stufen des Begriffsverständnisses nach Vollrath (1999)	41
6.1	Übersicht zum Leistungstest	78
6.2	Übersicht zum Interview	80
7.1	Anforderungen des Leistungstests	93
7.2	Richtige Antworten in den Interviews	98
7.3	Änderungen in der Bewertung von Fragen	100
7.4	Übersicht zum konzeptuellen Wissen der Interviewten aus Leistungsgruppe 1	115
7.5	Übersicht zum konzeptuellen Wissen der Interviewten aus Leistungsgruppe 2	123
7.6	Übersicht zum konzeptuellen Wissen der Interviewten	127
8.1	Übersicht zum konzeptuellen Wissen aller Interviewten	152

Anhang

Aufgaben des schriftlichen Leistungstests

Bemerkung zum Testheft

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde hier auf das Deckblatt und einen Bogen, auf dem die Probanden ihre Code-Namen notieren und ein paar allgemeine Angaben machen sollten, verzichtet. Die erfragten Daten bezogen sich auf Geschlecht, Alter und die letzte Zeugnisnote im Fach Mathematik.

1. Aufgabe

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen und schreiben Sie so kurz wie möglich.

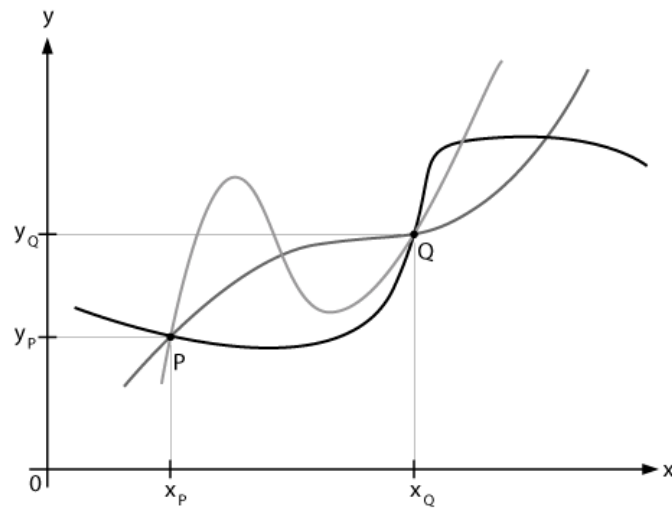
a) $g(x) = 4 \cdot x^5$

b) $h(x) = 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3$

c) $j(x) = 2 \cdot x^2 + 3 + 4 \cdot x^2$

2. Aufgabe

Gegeben sind viele (stetige) Graphen (siehe Beispiele in der Graphik), die alle durch zwei vorgegebene Punkte gehen.



Geben Sie eine kurze Begründung an, warum die durchschnittliche Steigung der unterschiedlichen Graphen zwischen P und Q übereinstimmen muss.

3. Aufgabe

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an.

3a

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle x ist ein Maß dafür,

- ☐ welchen Wert die Funktion an dieser Stelle x hat.
- ☐ wie steil der Graph der Funktion an dieser Stelle x ist.
- ☐ wie krumm der Graph der Funktion an dieser Stelle x ist.
- ☐ wie viele Werte die Funktion an dieser Stelle x hat.
- ☐ ob der Funktionsgraph an dieser Stelle x einen positiven oder negativen Wert hat.

3b

Die Funktion $f(x)$ ist eine differenzierbare Funktion, die auf den reellen Zahlen definiert ist. An der Stelle $x = 2$ liefert sie den Funktionswert $f(2) = 4$. Auch die Ableitung ist hier $f'(2) = 4$.

Welche Annäherung an den Wert der Funktion an der Stelle $x = 2,001$ lässt sich aus den obigen Informationen gewinnen?

- ☐ $4 \cdot 0,001 = 0,004$
- ☐ $4 + 4 \cdot 0,001 = 4,004$
- ☐ $4 + 0,001 = 4,001$
- ☐ zwischen $4 - 0,001 = 3,999$ und $4 + 0,001 = 4,001$

4. Aufgabe

Geben Sie die Gleichung einer Parabel an, die durch den Ursprung und den Punkt $(1|2)$ läuft. Der Graph ihrer Ableitungsfunktion läuft ebenfalls durch den Ursprung.

5. Aufgabe

Überlegen Sie sich, ob folgende Aussagen für alle verschobenen Normalparabeln mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2 + a$ gelten. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an.

- ☐ Der Funktionsgraph verläuft durch den Ursprung.
- ☐ Der Graph der Ableitungsfunktion verläuft achsensymmetrisch zur y -Achse.
- ☐ Der Graph der Ableitungsfunktion verläuft punktsymmetrisch zum Ursprung.
- ☐ Der Graph der Ableitungsfunktion verläuft durch den Ursprung.

6. Aufgabe, 1. Version h-Methode

HINWEIS: Bearbeiten Sie nur eine der Versionen von Aufgabe 6. Wählen Sie diese Version, wenn Ihnen die h -Methode geläufig ist. Blättern Sie sonst zur zweiten Version dieser Aufgabe weiter.

Peter hat von seinem Lehrer eine Aufgabe zurückbekommen und versteht die Bewertung nicht.

Aufgabe: Bestimmen Sie mittels des Differenzenquotienten die Ableitungsfunktion der quadratischen Funktion $f(x) = 3x^2 + 4$.

$$\text{Lösung: } \frac{y(x_0+h)-y(x_0)}{h} = \frac{3(x_0+h)^2+4-(3(x_0)^2+4)}{h} \quad (\text{I})$$

Vereinfacht ergibt sich:

$$\frac{y(x_0+h)-y(x_0)}{h} = \frac{3(x_0)^2+6x_0h+3h^2-3(x_0)^2}{h} = \frac{6x_0h+3h^2}{h} \quad (\text{II})$$

$$\text{Schließlich kürzt sich } h \text{ heraus: } \frac{y(x_0+h)-y(x_0)}{h} = 3(2x_0 + h) \quad (\text{III})$$

$$\text{Es gilt daher } y'(x_0) = 3 \cdot 2x_0 = 6x_0. \quad (\text{IV})$$

Da x_0 beliebig gewählt war, lässt sich die Aussage auf alle x verallgemeinern und die Ableitungsfunktion ist $y'(x) = 6x$.

Peter fragt: „Warum habe ich hier beim Übergang von Zeile (III) zu Zeile (IV) einen Punkt abgezogen bekommen? Das Ergebnis stimmt doch. Schließlich ist es genau das, was nach den Ableitungsregeln herauskommt.“

Begründen Sie den Punktabzug und erklären Sie möglichst genau, was zwischen den zwei benannten Zeilen von Peters Lösung geschieht. Fertigen Sie eine Skizze dazu an.

6. Aufgabe, 2. Version

HINWEIS: Bearbeiten Sie nur eine der Versionen von Aufgabe 6. Wählen Sie diese Version, wenn Ihnen diese Schreibweise des Differenzenquotienten vertrauter ist als die auf der vorigen Seite (mit h).

Peter hat von seinem Lehrer eine Aufgabe zurückbekommen und versteht die Bewertung nicht.

Aufgabe: Bestimmen Sie mittels des Differenzenquotienten die Ableitungsfunktion der quadratischen Funktion $f(x) = 3x^2 + 4$.	
Lösung:	$\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0} = \frac{3x^2+4-(3(x_0)^2+4)}{x-x_0}$ (I)
Vereinfacht ergibt sich:	$\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0} = \frac{3(x^2-x_0^2)}{x-x_0} = \frac{3(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}$ (II)
Schließlich kürzt sich $x - x_0$ heraus:	$\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0} = 3(x+x_0)$ (III)
Es gilt daher:	$y'(x_0) = 3(x_0+x_0) = 6x_0$. (IV)
Da x_0 beliebig gewählt war, lässt sich die Aussage auf alle x verallgemeinern und die Ableitungsfunktion ist $y'(x) = 6x$.	

Peter fragt: „Warum habe ich hier beim Übergang von Zeile (III) zu Zeile (IV) einen Punkt abgezogen bekommen? Das Ergebnis stimmt doch. Schließlich ist es genau das, was nach den Ableitungsregeln herauskommt.“

Begründen Sie den Punktabzug und erklären Sie möglichst genau, was zwischen den zwei benannten Zeilen von Peters Lösung geschieht.

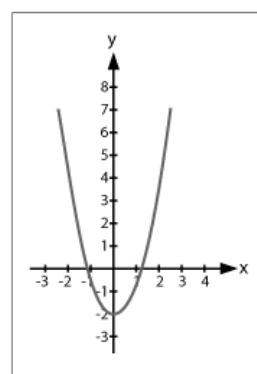
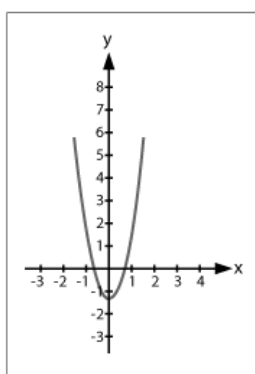
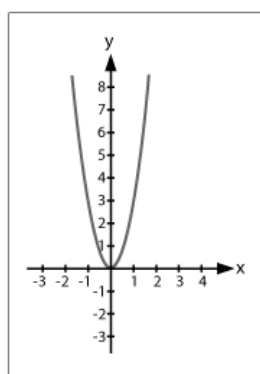
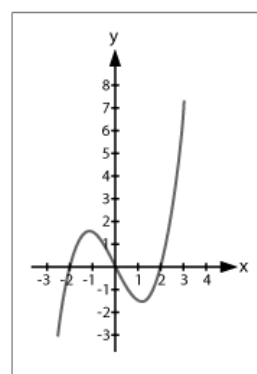
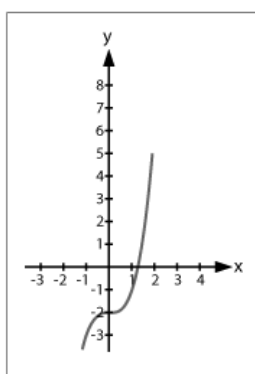
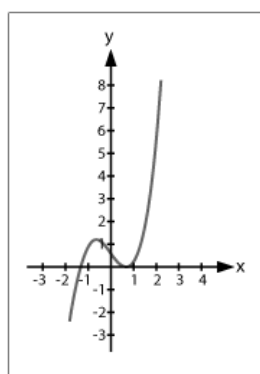
Fertigen Sie eine Skizze dazu an.

7. Aufgabe

Erklären Sie (gern auch mit Skizze), was Sie sich unter der *durchschnittlichen Steigung* einer Funktion vorstellen. Nutzen Sie gegebenenfalls auch den Platz auf der Rückseite.

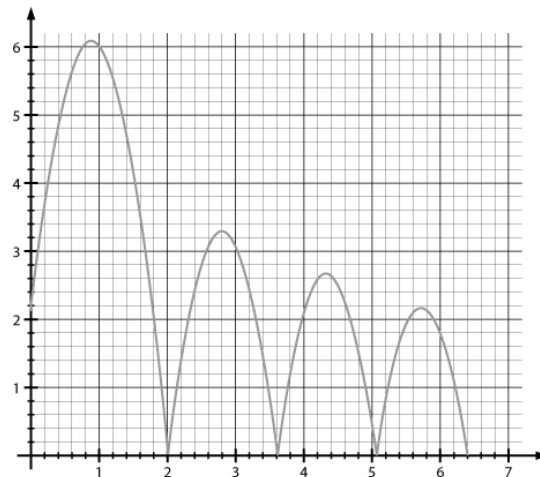
8. Aufgabe

Verbinden Sie jeweils den Funktionsgraphen (Zeile oben) mit dem Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion (Zeile unten).



9. Aufgabe

In der Abbildung ist der Graph einer Funktion dargestellt. Gehen Sie davon aus, dass die „Spitzen“ des Graphen auch für jeden anderen Maßstab erhalten bleiben.



1. Lesen Sie so genau wie möglich aus der Zeichnung ab, für welche Stellen x die Ableitung den Wert 0 hat?

2. Bestimmen Sie so genau wie möglich - durch Ablesen der zur Rechnung notwendigen Werte aus der Zeichnung - die Steigung an der Stelle $x = 0,4$ und an der Stelle $x = 1,6$.

3. Wie wird die Steigung an der Stelle $x = 2$ bestimmt? Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an.

- ☐ Die korrekte Steigung bei $x = 2$ ist der Durchschnitt der beiden rechnerischen Steigungen an dieser Stelle.
- ☐ Es wird wie in den obigen Aufgabenteilen gerechnet. Es gibt eben zwei Steigungen an dieser Stelle.
- ☐ Die Steigung an der Stelle $x = 2$ beträgt unendlich.
- ☐ Die Steigung ist die Ableitung. Und für $x = 2$ ist die Ableitung nicht definiert.

Fragenkatalog des Interviews

Bemerkung zu den Interviewer-Texten

An den Interview-Texten fällt zweierlei auf. Zum einen gibt es in den meisten Fragen fett-gedruckte Wörter. Diese Wörter sind für die Frage zentral, d.h. sie müssen unbedingt von den Befragten verstanden werden und sollten daher akzentuiert und betont ausgesprochen werden.

Zum anderen gibt es ab und an auch die Anmerkung „Nachfrage“ in runden Klammern. Dies sind jeweils eingeplante Interventionen, die als Reaktionen auf typische Antworten folgen. Diese typischen Antworten gründen teils auf theoretischen Überlegungen, teils aber auch auf Erfahrungen aus einigen Test-Interviews.

Bemerkung zu den schriftlichen Bearbeitungen

Ein Teil der Interviewfragen legte eine schriftliche Bearbeitung nahe. In diesen Fällen wurde den befragten Personen jeweils ein DIN A4- oder ein DIN A5-Blatt vorgelegt, auf dem die Aufgabenstellung in Kurzform geschrieben stand. Der Wortlaut dieser Arbeitsblätter findet sich hier jeweils ergänzend zu den Fragen des Interviewers, kenntlich gemacht durch **[AB-Text: ...]**, Graphische Darstellungen werden mit **AB-Bild:** eingeleitet. Um die Seiten besser auszunutzen wurden einige dieser Bilder hier etwas kleiner abgedruckt als im Original.

Die bearbeiteten Arbeitsblätter der Befragten wurden archiviert.

Interview-Fragen

1. Leiten Sie zu Beginn bitte diese Funktion ab.

[AB-Text: Leiten Sie zu Beginn bitte die Funktion f mit $f(x) = x^3$ ab.]

2. Bestimmen Sie nun den Wert der Ableitung für **diese** Funktion an der Stelle $x = 1$.

[AB-Text: Bestimmen Sie nun den Wert der Ableitung für die Funktion g mit $g(x) = 3x$ an der Stelle $x = 1$.]

3. a Geben Sie Beispiele an für **zwei differenzierbare Funktionen**, deren Ableitungen überall übereinstimmen.

(Nachfrage: Beginnen Sie damit eine (möglichst einfache) Funktion hinzuschreiben. Finden Sie dann die passende zweite dazu.)

- b Angenommen zwei differenzierbare Funktionen stimmen an nur **einer** Stelle in ihren Ableitungen überein. Beschreiben Sie bitte, welche Gemeinsamkeiten damit zwischen den beiden Funktionen bestehen.

(Nachfrage bei Berühr- oder Schnittpunkt: bitte ausführen)

- c Zeichnen Sie, wie für Sie der Graph einer differenzierbaren Funktion aussieht, deren **Ableitung überall negativ** ist.

[AB-Text: Zeichnen Sie, wie für Sie der Graph einer differenzierbaren **Funktion** aussieht, deren **Ableitung überall negativ** ist.]

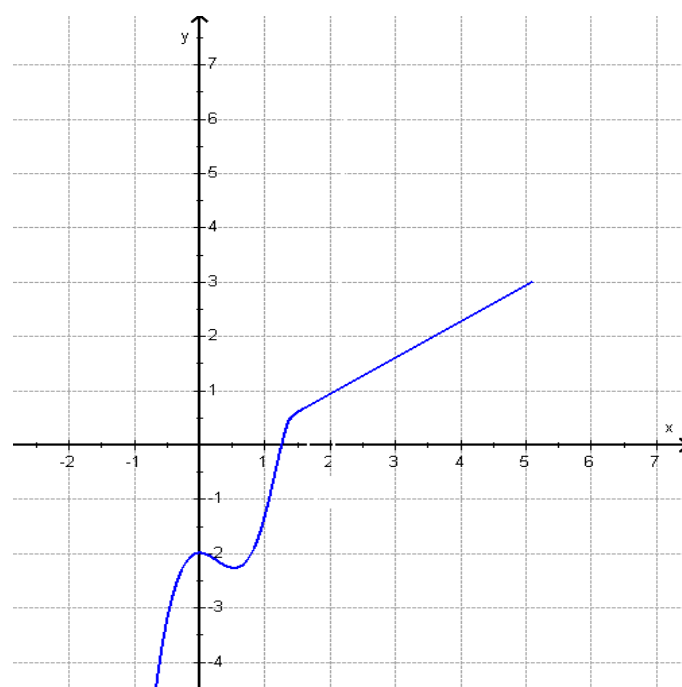
(Nachfrage: Zeichnen Sie einen zweiten Graphen ein, der sich vom ersten möglichst stark unterscheidet, dessen Ableitung aber auch überall negativ ist.)

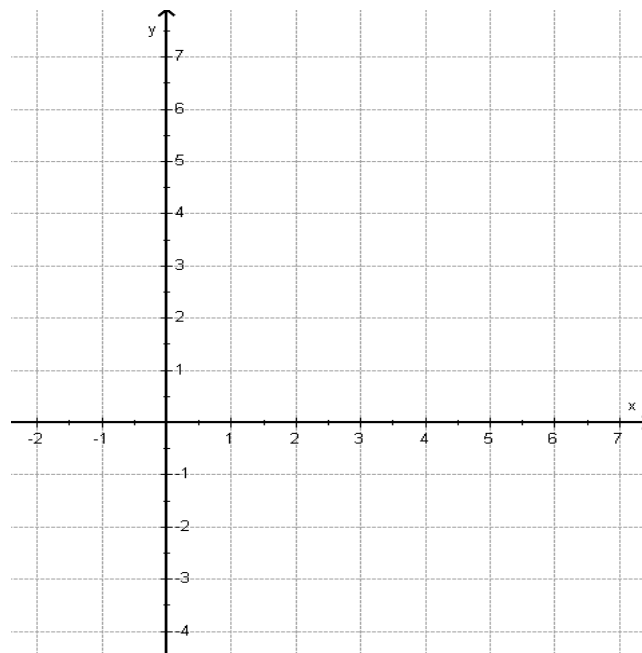
4. Im Bild sehen Sie den Graphen einer differenzierbaren Funktion. Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion zu dieser Funktion **als Skizze** in das leere Koordinatensystem.

(nächste Seite)

[AB-Text: Im Bild sehen Sie den Graphen einer differenzierbaren Funktion. Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion dazu **als Skizze** in das leere Koordinatensystem unten.]

AB-Bild:





5. Der Graph einer differenzierbaren Funktion hat im Punkt P die Steigung null. Wie stellen Sie sich vor verläuft der **Funktionsgraph** in der Nähe dieses Punktes?

(Nachfrage: Und wenn man noch näher an P heranzoomt?) (2x)

(Nachfrage: Vorzeichenwechsel, bitte ausführen.)

6. Bestimmen Sie per Bildung des Differenzialquotienten (d.h. ohne die Ableitungsregeln) die Ableitung der angegebenen Funktion an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$.

(Auf Ihrem Blatt ist eine Hilfe angegeben, die Sie im Laufe der Rechnung eventuell gebrauchen.)

[AB-Text: Bestimmen Sie per **Bildung des Differenzialquotienten** (d.h. ohne die Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^4$ an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$.

(Hilfe: $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$)

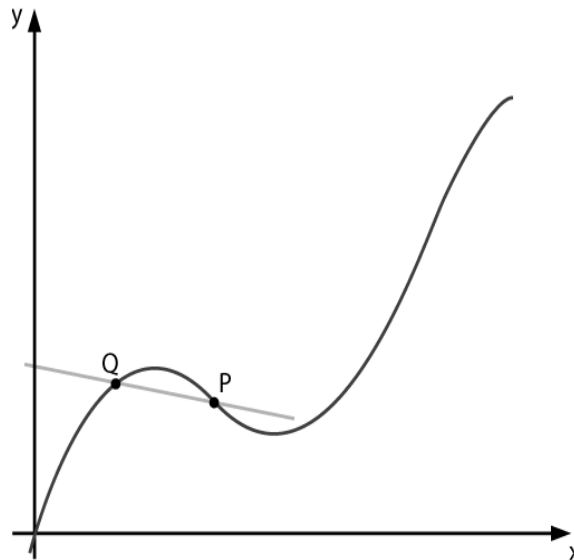
(Nachfrage: Wenden Sie die „h-Methode“ an.)

7. **Erklären** Sie bitte nach Ihrem Verständnis, wie man von der Sekantensteigung ausgehend die Steigung des Funktionsgraphen im Punkt P bestimmt - siehe Zeichnung.

(nächste Seite)

[AB-Text: **Erklären** Sie bitte nach Ihrem Verständnis, wie man von der Sekantensteigung ausgehend die Steigung des Funktionsgraphen im Punkt P bestimmt - siehe Zeichnung.]

AB-Bild:



(Nachfrage: Welche Steigungen spielen also alles eine Rolle?)

8. Die Ableitung wird in manchen Zusammenhängen auch als **Änderungsrate** bezeichnet. Beschreiben Sie in eigenen Worten welche **Änderungen** Ihnen dazu zuerst einfallen.

(Nachfrage: Versuchen Sie das zu verallgemeinern.)

9. Stellen Sie sich den Graphen einer differenzierbaren Funktion vor, der an **genau zwei** Stellen a und b waagerechte Tangenten hat. Zeichnen Sie verschiedene Möglichkeiten, wie der Funktionsgraph im Intervall zwischen diesen Stellen a und b verlaufen könnte?

[AB-Text: Der Graph einer differenzierbaren Funktion f hat an **genau zwei Stellen** a und b waagerechte Tangenten. Finden Sie verschiedene Möglichkeiten, wie der Funktionsgraph im Intervall $[a, b]$ verlaufen könnte?]

(Nachfrage: Möchten Sie noch weiter suchen oder eine neue Frage?)

10. Für eine differenzierbare Funktion gilt, dass die **durchschnittliche Änderungsrate** zwischen einer Stelle a und einer Stelle b null ist. Welche Verläufe des Funktionsgraphen sind damit zwischen a und b denkbar?

[AB-Text: Für eine differenzierbare Funktion ist die durchschnittliche Änderungsrate null, d.h. also $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, für zwei Stellen a und b . Welche Verläufe des Funktionsgraphen sind damit zwischen a und b denkbar?]

(Nachfrage: Versuchen Sie diese Frage zu beantworten, indem Sie die Änderungsrate durch den Begriff „Steigung“ ersetzen.)

11. Angenommen, für eine **monotone und differenzierbare** Funktion sind nur ein paar Werte bekannt, nämlich der Funktionswert an der Stelle $x = 3$ und die Ableitung an dieser Stelle. **Erklären** Sie folgende Abschätzungen, die aus diesen Daten für den Funktionswert an der Stelle $x = 3,01$ abgeleitet werden.

[AB-Text: Angenommen, für eine **monotone und differenzierbare** Funktion f gelten die Werte $f(3) = 5$ und $f'(3) = 2$. **Erklären** Sie folgende Abschätzungen aus diesen Daten für den Funktionswert $f(3,01)$.

- (a) $f(3,01) \approx f(3)$
- (b) $f(3,01) \approx f(3) + 2 \cdot 0,01$
- (c) $f(3,01) \approx f(3) + 0,01$

(Nachfrage: Wie gut gefallen Ihnen die Abschätzungen?)

12. a Bestimmen Sie aus folgendem Graphen **so genau wie möglich die Steigung** an der Stelle $x = 1,6$.

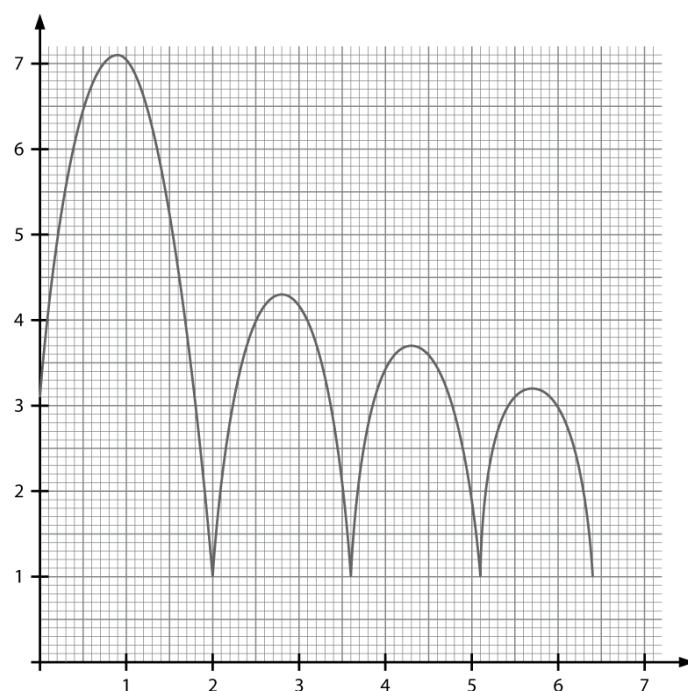
(Nachfrage: Möchten Sie das Geodreieck zur Hilfe nehmen? Ich gebe Ihnen das Stichwort „Steigungsdreieck“.)

- b Bestimmen Sie **ebenfalls** die Steigung an der Stelle $x = 2$.

[AB-Text: Bestimmen Sie aus folgendem Graphen **so genau wie möglich** die **Steigung** an der Stelle $x = 1,6$.]

[AB-Text: Bestimmen Sie ebenso die Steigung an der Stelle $x = 2$.]

AB-Bild:



(Nachfrage: Was würden Sie antworten, wenn Sie nach der Ableitung an dieser Stelle gefragt werden?)

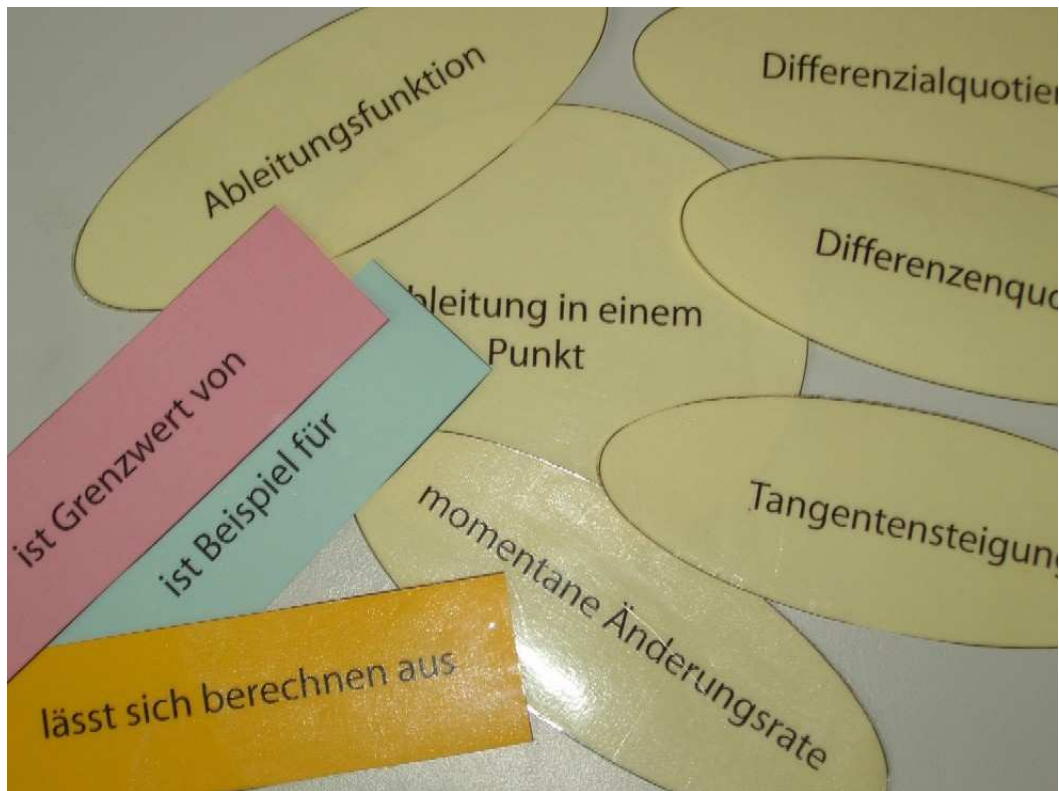
(Nachfrage: Können Sie das auch begründen?)

13. Der Graph einer differenzierbaren Funktion hat in einem Punkt P **keine** unterschiedlichen Tangenten. Er hat **eine einzige, eindeutig bestimmte** Tangente. Wie machen Sie sich diesen Sachverhalt klar?

(Nachfrage: Gehen Sie davon aus, dass die **Ableitung** im Punkt P **eindeutig** ist. Starten Sie damit Ihre Argumentation.)

[AB-Text: Der Graph einer differenzierbaren Funktion hat in einem Punkt P eine **einzige, eindeutig bestimmte** Tangente.
Wie machen Sie sich diesen Sachverhalt klar?]

Mind Mapping



1. Map: Arbeitsauftrag und verwendete Begriffe

Als zentraler Begriff wird die „Ableitung in einem Punkt“ verwendet, was auf einer hellgelben Kreisscheibe aus Papier notiert wurde.

Um diesen Begriff herum sind folgende sechs Begriffe, ebenfalls in der Gestalt hellgelber, allerdings oval geformter Kärtchen, anzuordnen. Eine größere Nähe der entsprechenden Begriffskärtchen zueinander entspricht dabei der größeren (Bedeutungs-)Nähe der Begriffe.

Nicht bekannte oder nicht passend erscheinende Begriffskärtchen, darf der Proband beiseite legen. Ebenso stehen blanko-Kärtchen zur Verfügung, die sich bei Bedarf mit noch fehlenden Begriffen beschriften lassen. Zeitliche Vorgaben gibt es für diese Aufgabe nicht.

- Ableitungsfunktion,
- Differenzenquotient,
- Differenzialquotient,
- momentane Änderungsrate,
- Tangentensteigung und die
- Steigung des Funktionsgraphen in einem Punkt.

2. Map: erweiterter Arbeitsauftrag und zusätzlich verwendete Relationen

Zum Einsatz kommen nun zusätzlich insgesamt sieben vorgefertigte Relationstypen, dargestellt als rechteckige, beschriftete Kärtchen, wobei je Relationstyp eine eigene Farbe verwendet wird und alle Typen in mehrfacher Ausfertigung vorliegen. Zudem werden einige Blanko-Kärtchen angeboten, die mit weiteren Relationstypen beschriftet werden können.

Die Relationskarten verbinden immer zwei Begriffskarten, wobei auch mehrere Relationen untereinander liegen, d.h. die zwei Begriffe verbinden, dürfen. Wie bei der ersten Aufgabe dürfen eigene Begriffe und Relationen hinzugefügt werden, dürfen vorgegebene Begriffe und Relationen ungenutzt bleiben und gibt es keine zeitlichen Vorgaben.

Die Relationstypen sind

- ist abhängig von,
- ist Grenzwert von,
- ist Beispiel für,
- kann identifiziert werden mit,
- kann man sich vorstellen als,
- lässt sich berechnen aus und
- lässt sich ablesen aus.